古典-量子通信路における通信路行列公式の拡張

石川 喜啓　　　指導教員：臼田 毅

1　はじめに

すべての物理的な通信路は結局のところ量子通信路であるということから，量子状態による古典情報伝送（しばしば古典-量子通信と呼ばれる）について考察することは極めて重要である．とりわけ，量子雑音が無視できない光などの高周波電磁波を用いた通信においては本質的といえる．古典-量子通信においては，すでに量子通信路符号化定理が証明されている．それによると，符号長無限大の極限で漸近的に達成される通信路容量は，von Neumann エントロピーを使って定義される Holevo 量により計算できる．しかしながら，実際の有限の符号長での伝送情報量や平均誤り率などの計算は，むしろ困難である．このため，汎用的な数値計算アルゴリズムによるのでは無く，通信路行列の解析解を与えるアプローチが進められ，最終的に，狭義の群共変的量子信号 [1] に対する公式が明らかにされた [2]（ただし，アーベル群に限る）．

しかしながら，多相 PSK コヒーレント状態信号を拡大体上の符号によって符号化した量子信号系など，応用上非常に重要であると言われる信号の中で，狭義群共変的ではないものがある [?]．これらの群共変的な信号に対しては，従来の通信路行列公式 [2] が適用できないため，公式の一般化が必要である．このため，通信路行列公式の一般化に向けた前段階として，狭義の群共変的量子信号を拡張した $(G,\hat{\chi})$-共変的量子信号を定義し，その必要十分条件を与えた [3]．

本論文では，G が任意のアーベル群，$\hat{\chi}$ がある特殊な写像である場合について，$(G,\hat{\chi})$-共変的量子信号に対する通信路行列公式を与える．

2　従来の結果の復習

2.1　狭義の群共変的信号とその必要条件

ここでは，狭義の群共変的信号の定義 [1] とその必要十分条件について復習する．

定義 1：狭義の群共変的信号 [1]
$(G;\circ)$ を有限群とする．量子信号系 $\{|\psi_i\rangle\,|i\in G\}$ は，

$$\forall i,k\in G,\exists U_k(\text{ユニタリ}),U_k\,|\psi_i\rangle=|\psi_{k\circ i}\rangle \tag{1}$$

であるとき，群 $(G;\circ)$ に関して（狭義）群共変的と呼ばれる．

この定義 1 から，以下の必要十分条件が得られる．

命題 2：狭義の群共変的信号の必要十分条件 [1]
量子信号系 $\{|\psi_i\rangle\,|i\in G\}$ が $(G;\circ)$ に関して狭義群共変的であるための必要十分条件は，

$$\forall i,j,k\in G,\langle\psi_{k\circ i}|\psi_{k\circ j}\rangle=\langle\psi_i|\psi_j\rangle \tag{2}$$

が成り立つことである．

命題 2 は，狭義の群共変的信号の内積に対する条件を示しているが，量子信号の内積を要素とする行列として定義されるため，グラム行列の形式を規定していることがわかる．命題 2 より，以下の系が直ちに導かれる．

系 3：狭義の群共変的信号の必要条件
量子信号系 $\{|\psi_i\rangle\,|i\in G\}$ が $(G;\circ)$ に関して狭義群共変的であるためには，グラム行列の各行が，すべて 0 行目を並べ替えたものとなっていなければならない．したがって，$\gamma_i=\{\langle\psi_i|\psi_j\rangle\,|j\in G\}$ をグラム行列の第 i 行目の要素全体からなる集合とすると，

$$\forall i,k\in G,\gamma_i=\gamma_k \tag{3}$$

が成立する．

2.2　狭義の群共変的信号に対する通信路行列公式 [2]

$(G;\circ)$ を演算 $\circ$ をもつ位数 M のアーベル群とし，

$$G=\{0,1,\cdots,M-1\} \tag{4}$$

とおく．ここで，0 は G の単位元である（すなわち，$\forall i\in G, 0\circ i=i\circ 0=i$）．また，

$$\hat{G}=\{\chi_0,\chi_1,\cdots,\chi_{M-1}\} \tag{5}$$

を G の指標全体からなる乗法群とする．

$\{|\psi_i\rangle|i\in G\}$ を狭義の群共変的量子信号とし，$\Gamma_G=[\langle\psi_i|\psi_j\rangle]$ をそのグラム行列とする．このとき，Γ_G の固有値と固有ベクトルの解析解および固有ベクトルの正規直交性を示す以下の命題 4,5 が成立する．

命題 4：Γ_G の固有値と固有ベクトルの解析解 (1)

$$\lambda_i=\sum_{j\in G}\chi_i(j)\langle\psi_0|\psi_j\rangle \tag{6}$$

$$\boldsymbol{\lambda}_i=\frac{1}{\sqrt{M}}\begin{bmatrix}\chi_i(0)\\ \chi_i(1)\\ \vdots\\ \chi_i(M-1)\end{bmatrix} \tag{7}$$

は，それぞれ，Γ_G の固有値 λ_i と対応する固有ベクトル $\boldsymbol{\lambda}_i$ である．ただし，$i\in G$．

命題 5：Γ_G の固有ベクトルの正規直交性 (1)
命題 4 の固有ベクトル $\boldsymbol{\lambda}_0,\boldsymbol{\lambda}_1,\cdots,\boldsymbol{\lambda}_{M-1}$ は正規直交である．

命題 4,5 より，次の定理が得られる．

定理 6：狭義の群共変的信号に対する通信路行列公式
任意の $0\le i,j\le M-1$ に対して

$$(\Gamma_G)^{1/2}_{ij}=\frac{1}{M}\sum_{l\in G}\chi_l(i\circ j^{-1})\sqrt{\sum_{k\in G}\chi_l(k)\langle\psi_0|\psi_k\rangle} \tag{8}$$

量子信号 $\{|\psi_i\rangle|i\in G\}$ を Square-root measurement により測定した場合の通信路行列の各要素は，$|\psi_i\rangle$ を送信したときに状態 $|\psi_j\rangle$ に対応する古典情報 j に決定する条件付き確率 $P(j|i)$ であり，$P(j|i)=\left|(\Gamma_G)^{1/2}_{ij}\right|^2$ であることが知られている [5]．式 (8) を単に絶対値 2 乗すれば通信路行列の要素が得られることから，定理 6 は通信路行列の解析解に関する定理といえる．

3　$(G, \hat{\chi})$-共変的量子信号とその必要十分条件

本論文で扱う $(G, \hat{\chi})$-共変的量子信号は，狭義の群共変的量子信号の定義を拡張したものである．以下，$(G, \hat{\chi})$-共変的量子信号の定義とその必要十分条件について説明する．

定義 7**：**$(G, \hat{\chi})$**-共変的量子信号** [3]
$(G; \circ)$ を有限群とする．量子信号系 $\{|\psi_i\rangle \,|i \in G\}$ は，

$$\forall i, k \in G, \exists U_k(\text{ユニタリ}), U_k|\psi_i\rangle = \hat{\chi}(k, i)|\psi_{k \circ i}\rangle \tag{9}$$

であるとき，$(G, \hat{\chi})$-共変的であるという．ここで，$\hat{\chi}(i, j)(i, j \in G)$ は $\hat{\chi} : G \times G \to \mathbb{U} = \{x \in \mathbb{C} \mid |x| = 1\}$ なる写像であり，$\mathbb{C}$ は複素数全体である．

定義 7 において，$\hat{\chi}(i, j) = 1, (\forall i, j \in G)$ とすると，定義 1 に一致する．このため，$(G, \hat{\chi})$-共変的量子信号は，狭義の群共変的信号を拡張したものであるといえる．狭義の場合と同様に，この定義 7 から，以下の必要十分条件が得られる．

命題 8**：**$(G, \hat{\chi})$**-共変的量子信号の必要十分条件** [3]
量子信号系 $\{|\psi_i\rangle \,|i \in G\}$ が $(G, \hat{\chi})$-共変的であるための必要十分条件は，

$$\forall i, j, k \in G, \langle\psi_{k \circ i}|\psi_{k \circ j}\rangle = \hat{\chi}(k, i)\overline{\hat{\chi}(k, j)}\langle\psi_i|\psi_j\rangle \tag{10}$$

が成り立つことである．

命題 8 について，$(G, \hat{\chi})$-共変的量子信号の内積に対する条件を示している．したがって，命題 2 と同様にグラム行列の形式を規定していることがわかる．

4　$(G, \hat{\chi})$-共変的信号に対する通信路行列公式

本節では，前節で定義を示した $(G, \hat{\chi})$-共変的信号において，$\hat{\chi}$ がある特殊な写像である場合について，通信路行列公式を示す．

2.2 節と同様に，$(G; \circ)$ を位数 M のアーベル群とし，G と $\hat{G}$ をそれぞれ，式 (4) と (5) とする．写像 $\hat{\chi}$ を次のように定義する．

$$\hat{\chi}(i^{-1}, j) = \begin{cases} 1 & i = 0 \text{ or } j = 0 \text{ or } j = i \\ -1 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{11}$$

$\{|\psi_i\rangle |i \in G\}$ を $(G, \hat{\chi})$-共変的量子信号とし，$\Gamma_G = [\langle\psi_i|\psi_j\rangle]$ をそのグラム行列とする．

以上を準備とし，$(G, \hat{\chi})$-共変的量子信号の通信路行列公式を示していく．

命題 9**：**Γ_G **の固有値と固有ベクトルの解析解** (2)

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \chi_i(0) - \sum_{j=1}^{M-1} \chi_i(j)\langle\psi_0|\psi_j\rangle \\ &= 1 - \sum_{j=1}^{M-1} \chi_i(j)\langle\psi_0|\psi_j\rangle \end{aligned} \tag{12}$$

$$\boldsymbol{\lambda}_i = \frac{1}{\sqrt{M}} \begin{bmatrix} \chi_i(0) \\ -\chi_i(1) \\ \vdots \\ -\chi_i(M-1) \end{bmatrix} \tag{13}$$

は，それぞれ，Γ_G の固有値 λ_i と対応する固有ベクトル $\boldsymbol{\lambda}_i$ である．ただし，$i \in G$.

命題 9 の証明は省略する．

命題 10**：**
$\theta_0, \theta_1, \cdots, \theta_{M-1}$ を任意位相とし，$i \in G$ に対して $\boldsymbol{\lambda}'_i$ を以下のように定義する．

$$\boldsymbol{\lambda}'_i = \frac{1}{\sqrt{M}} \begin{bmatrix} e^{\mathbf{i}\theta_0}\chi_i(0) \\ e^{\mathbf{i}\theta_1}\chi_i(1) \\ \vdots \\ e^{\mathbf{i}\theta_{M-1}}\chi_i(M-1) \end{bmatrix} \tag{14}$$

このとき，$\boldsymbol{\lambda}'_i \cdot \boldsymbol{\lambda}'_j = \delta_{ij}$．ただし，$\mathbf{i} = \sqrt{-1}$，$\boldsymbol{\lambda}'_i \cdot \boldsymbol{\lambda}'_j$ はベクトル $\boldsymbol{\lambda}'_i$ と $\boldsymbol{\lambda}'_j$ の内積を表し，δ_{ij} はクロネッカーのデルタである．

ここでは証明を省略する．

命題 10 により，以下の系 11 が直ちに導かれる．

系 11**：**Γ_G **の固有ベクトルの正規直交性** (2)
命題 9 の固有ベクトル $\boldsymbol{\lambda}_0, \boldsymbol{\lambda}_1, \cdots, \boldsymbol{\lambda}_{M-1}$ は正規直交である．

命題 9 と系 11 により，最終的な結果として次の定理が得られる．

定理 12**：**$(G, \hat{\chi})$**-共変的信号に対する通信路行列公式**
$i = j = 0$ または $1 \leq i, j \leq M - 1$ に対して

$$(\Gamma_G)_{ij}^{1/2} = \frac{1}{M} \sum_{l \in G} \chi_l(i \circ j^{-1}) \sqrt{1 - \sum_{k=1}^{M-1} \chi_l(k)\langle\psi_0|\psi_k\rangle} \tag{15}$$

$i = 0, 1 \leq j \leq M - 1$ または $j = 0, 1 \leq i \leq M - 1$ に対して

$$(\Gamma_G)_{ij}^{1/2} = -\frac{1}{M} \sum_{l \in G} \chi_l(i \circ j^{-1}) \sqrt{1 - \sum_{k=1}^{M-1} \chi_l(k)\langle\psi_0|\psi_k\rangle} \tag{16}$$

5　まとめ

本論文では，G が任意のアーベル群，$\hat{\chi}$ がある特殊な写像である場合について，$(G, \hat{\chi})$-共変的量子信号に対する通信路行列公式を与えた．本結果は，従来の狭義の群共変的信号に対する結果には含まれないため，本結果と従来の結果を合わせると，通信路行列公式の適用範囲が広がったと言える．今後，$\hat{\chi}$ が本稿とは別の写像である場合の通信路行列公式について検討し，公式の適用範囲をさらに広げていく．

参考文献

[1] T.S. Usuda and I. Takumi, QCCM2, pp.37-42, (2000).
[2] T.S. Usuda and K. Shiromoto, QCMC, pp.97-100, (2011).
[3] 石川, 太田, 城本, 臼田, SITA2011, pp.216-221, (2011).
[4] T.S. Usuda, Y. Ishikawa, and K. Shiromoto, QCMC2012, p.361,
[5] P. Hausladen, et.al.,Phys. Rev. **A54**, pp.1869-1876, (1996).(2012).

公表論文

1) **Y. Ishikawa**, K. Shiromoto, and T.S. Usuda, AQIS2013, pp.209-210, (2013.8).