

量子減衰通信路における通信路容量の特性

大橋 一葉 指導教員：白田 毅

1 はじめに

Giovannetti らによって光ファイバや自由空間伝送をモデル化した量子減衰通信路における広帯域及び狭帯域通信路容量が示された [1]。しかし、ここでの”広帯域”は、0[Hz] から ∞ [Hz] の周波数帯域を意味し、さらに達成条件として通信路を絶対零度下におく必要があるため、広帯域通信路容量の実現は難しい。よって究極の限界性能そのものではなく上界を示すとらえられる。

そこで先行研究では、波長分割多重 (wavelength division multiplexing, WDM) を行うことで広帯域通信路容量に近い値を得ようと考えた。波長分割多重とは、周波数が異なる光は互いに干渉しないことを利用し、周波数帯域が異なる複数の信号を多重化し一本の通信路で送る技術である。先行研究では、有限の周波数帯域である狭帯域通信路を波長分割多重した場合の通信路容量が、広帯域通信路容量にどれだけ近づくかを考察し、入力パワーが小さい場合には広帯域通信路容量を達成することを明らかにした [2]。

本稿では、まず先行研究の補足として、入力パワーが大きい場合に存在する、広帯域通信路容量と波長分割多重を行った場合の通信路容量のギャップの原因について考察した [6]。次に限界性能の上界である広帯域通信路容量に代わる、究極の性能限界そのものである波長分割多重による通信路容量の上限を求めた [5]。最後に、先行研究とは異なり、周波数依存の減衰通信路 (自由空間伝送) の通信路容量を求めた [6]。自由空間は真空状態の理想化された空間であり、宇宙での衛星間通信を想定している。

2 通信路容量の式

広帯域通信路容量 C_{WB} は

$$C_{WB}(P) = \frac{\pi}{\ln 2} \sqrt{\frac{2\eta P}{3h}} \quad [\text{bits/s}] \quad (1)$$

により導出される [1]。入力パワーは P [W] に制限されており、透過率を η 、プランク定数を h とする。

一方、波長分割多重による通信路容量 C_{multi} は単一周波数モードの狭帯域通信路容量の和により導出でき、各モードの入力パワー P_i 、中心周波数 f_i 、帯域幅 B_i とすると

$$C_{multi}(P) = \sum_{i=1}^M B_i g\left(\frac{\eta P_i T}{h f_i}\right) \quad [\text{bits/s}] \quad (2)$$

$$g(x) \equiv (x+1) \log_2(x+1) - x \log_2 x \quad (3)$$

により導出される [2]。パルス幅を T 、モード数を M 、各周波数帯域は重ならないよう $f_{max} - f_{min} \geq \sum_{i=1}^M B_i$ とし、各モードの帯域幅は任意の i に対して $B = B_i$ とする。トータル入力パワー P は $P = \sum_{i=1}^M P_i$ とし、各モードの入力パワー配分は注水定理に基づいてエネルギーを最適に配分する。注水定理とは、通信路容量が最大になるように各モードへエネルギーを最適に分配する定理である。雑音エネルギーと割り当てたエネルギーの和が各モードに対して一定となるよう、雑音の小さな所には多くの入力パワーを、大きな所には少ない入力パワーを割り当てる。

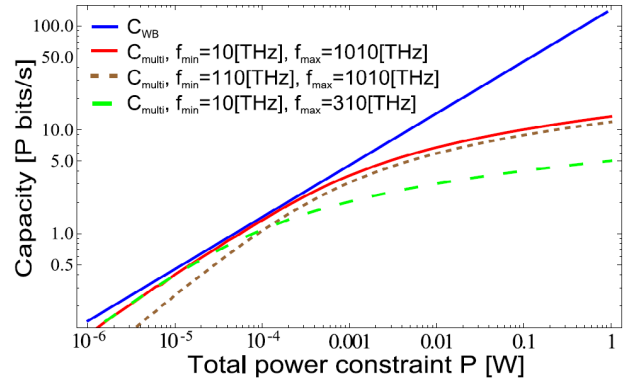


図1 Capacity with frequency independent loss

3 通信路容量のギャップの現れ方の原因の考察

図1の青実線が C_{WB} 、赤実線が文献 [2] の C_{multi} 、茶点線は赤実線を基準として周波数帯域の下限 f_{min} を高めた場合、緑破線は上限 f_{max} を低くした場合である。

図1より、波長分割多重による通信路容量の f_{min} を制限すると P が低い所に、 f_{max} を制限すると P が高い所にギャップが増える。

これは、量子雑音スペクトルと注水定理によるパワー配分により説明できる。量子雑音スペクトルのエネルギーは周波数に比例して大きくなるため、注水定理に基づいて入力パワーを配分すると、低い周波数ほど多く入力パワーが割り当てられる。よって P が低い場合は、周波数が高い領域には入力パワーは分配されないため f_{max} を制限しても通信路容量への影響は少ないが、 f_{min} を制限するとギャップが増える。反対に P が高い場合は、周波数が高い領域にも入力パワーが分配されるため f_{min} を制限しても通信路容量への影響は少ないが、 f_{max} を制限するとギャップが増える。

このように P の違いによってギャップを埋めるために必要とする周波数帯域が異なる。

4 WDM による通信路容量の限界

文献 [1] において示された量子減衰通信路に対する広帯域通信路容量は、究極の限界性能そのものではなく上界を示すとらえられる。しかし実現が難しい上界を示すよりも、究極の限界性能である上限を示した方が有益である。本節では、広帯域通信路容量のように実行不可能である通信路容量の限界性能の上界に代え、波長分割多重による通信路容量の上限を求め、量子通信における真の究極の限界性能を示す。

本節では計算の簡単のため、各モードに対する入力パワーを等配分 ($P_i = P/M$) とする。

式 (2) より、波長分割多重による通信路容量 C_{multi} の上限を求めるにはモード数 M を無限とする。各モードの帯域幅 B が微小になるので、 $\alpha = \eta P_i T/h$ とおき

$$g_2(x) \equiv \left(\frac{\alpha}{x} + 1\right) \log_2 \left(\frac{\alpha}{x} + 1\right) - \frac{\alpha}{x} \log_2 \frac{\alpha}{x} \quad (4)$$

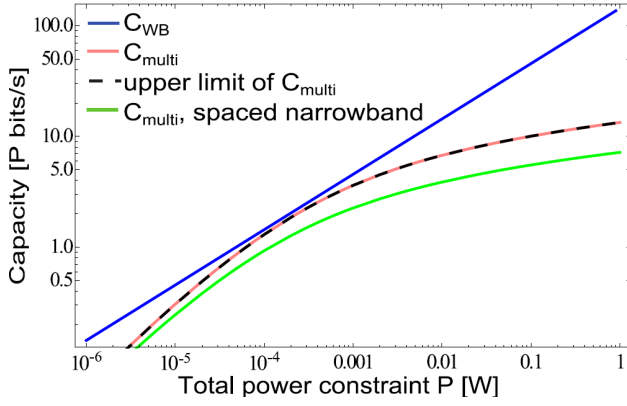


図2 Capacity of quantum channel

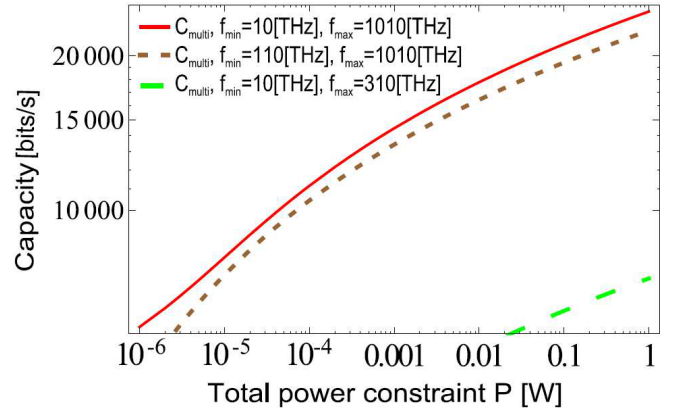


図3 Capacity by WDM for free-space channel

として、計算に区分積法を用いると

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow \infty} C_{\text{multi}} &= \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^M Bg \left(\frac{\eta P_i T}{h f_i} \right) \\ &= \int_{f_{\min}}^{f_{\max}} g_2(x) dx \end{aligned} \quad (5)$$

となる。これを計算すると、

$$\begin{aligned} &\alpha / \log_e 2 [\text{Li}_2(-\alpha/x)]_{f_{\min}^{\max}} \\ &+ 1 / \log_e 2 [x \log_e(\alpha/x + 1) + \alpha \log_e(x + \alpha)]_{f_{\min}^{\max}} \\ &- \alpha / \log_e 2 [\log_e x (\log_e \alpha - 1/2 \log_e x)]_{f_{\min}^{\max}} \end{aligned} \quad (6)$$

になる [5]。 $\text{Li}_2(z) = \int_0^z \frac{-\log_e(1-t)}{t} dt$ は多重対数関数である。

図2に広帯域通信路容量 C_{WB} と、波長分割多重による通信路容量 C_{multi} 、式(6)の C_{multi} の上限を示す。青実線は C_{WB} 、赤実線は周波数帯域 $f_{\min} = 10[\text{THz}]$ から $f_{\max} = 1010[\text{THz}]$ とし、 $M = 1000$ とした場合の C_{multi} であり、黒破線が通信路容量の上限である。緑実線は、赤実線と周波数帯域は同じであるが、実際に行われている波長分割多重の設定に近づけるため、狭帯域通信路の間に 50GHz の間隔を空け、帯域幅 $B = 50[\text{GHz}]$ として波長分割多重を行った。

図2より、黒破線はトータル入力パワー $P = 10^{-4}[\text{W}]$ で青実線に近づき、広帯域通信路容量をほぼ達成する。また、赤実線は黒破線とほぼ一致し、 1000 多重でも上限にほぼ達するといえる。緑実線は黒破線からややギャップがあるが、平均光子数が小さいときにはギャップは小さく、周波数利用効率が 50% でも通信路容量の上限に近い値をとる。

5 自由空間伝送の通信路容量についての考察

自由空間伝送による量子減衰通信路の通信路容量は

$$C = \sum_i g(\eta_i N_i(\beta)) \quad [\text{bits}] \quad (7)$$

により導出される [1]。自由空間伝送とは、真空状態で行う伝送のことであり、具体的には宇宙空間で衛星間の無線通信を行う場合が考えられる。自由空間伝送では、通信路長が十分に長ければ、モード i の減衰率 η_i は

$$\eta_i = A_t A_r \left(\frac{f_i}{2\pi c L} \right)^2 \ll 1 \quad (8)$$

が成り立つ。 A_t と A_r はそれぞれ送信側と受信側における光ビームの面積で、通信路長 L 、光速 c とする。

$$N_i(\beta) = 1 / \{ \eta_i (e^{\beta h f_i / \eta_i} - 1) \} \quad (9)$$

は最適な光子数分布であり、 β を注水定理で与える。

図3の C_{multi} の周波数帯域は図1の C_{multi} と同じものを使い、赤実線を基準とし f_{\min} を制限したものを緑破線、 f_{\max} を制限したものを茶点線とする。 $A_t = 10^{-2}[\text{m}^2]$ 、 $A_r = 5 \times 10^{-2}[\text{m}^2]$ 、 $L = 10000[\text{km}]$ とした。

図3より f_{\min} や f_{\max} を制限しても、3節の減衰が周波数に依存しない減衰通信路のように、周波数帯域の上限・下限に依存するようなギャップの現れ方はせず、周波数帯域が広いほど通信路容量が多くなる。

これは、量子雑音スペクトルは周波数に比例して大きくなるが、通信路の減衰は高い周波数ほど小さくなり、両者の影響が逆特性として効くためである。

6 まとめ

量子減衰通信路における広帯域及び波長分割多重による通信路容量について考察を行った。

周波数に依存しない減衰通信路に波長分割多重を行った場合の通信路容量のギャップの原因は、量子雑音スペクトルと注水定理によるパワー配分によって説明できると明らかにした。次に、波長分割多重による通信路容量の上限を求めた。最後に、周波数に依存する減衰通信路(自由空間伝送)の通信路容量を計算し、雑音スペクトルと通信路の減衰が逆特性として効くと説明できると明らかにした。

今後は減衰通信路の設定をより光ファイバに近づけた場合の通信路容量について考察を行う。

参考文献

- [1] V. Giovannetti, et al., Phys. Rev. Lett. **92**, 027902, 2004.
- [2] Y. Takamura, et al., Proc. of ISITA2010, pp.1045-1049, 2010.
- [3] 大橋 一葉, 他, 平成 23 年度東海支部連合大会 講演論文集, B3-4, 2011.
- [4] 大橋 一葉, 他, SITA2011 予稿集, pp.483-487, 2011.
- [5] 大橋 一葉, 他, 平成 24 年度東海支部連合大会 講演論文集, P4-4, 2012.
- [6] K. Ohashi, et al., Proc. of ISITA2012, pp.212-215, 2012.