特異値分解を利用した二乗誤差基準によるCT再構成

情報科学研究科 ファン フー ズイ 指導教員：戸田 尚宏

1 はじめに

X 線 CT(Computed Tomography) を利用した医療診断において，被曝量の低減化が求められているが，画質の劣化を抑制する問題を解決しなければならず，近年，最適化理論に基づいた逐次型再構成アルゴリズムが注目されている [1]．最適化の際に用いる評価量として二乗誤差及び尤度が代表的である．X 線の測定値に含まれる量子雑音は，ポアソン分布に従う事が知られており，後者の尤度の方が一般に適していると考えられている．しかし，X 線 CT の再構成においては空間の分割数や観測したデータの数 (以下観測総数とする) といった再構成画像に影響する様々な要因が存在するため，尤度が常に有効であるかという点は明確になっていなかった．そこで本研究では，特異値分解 [2] を利用した二乗誤差基準による再構成法を提案し，尤度を利用した方法 [3] と精度，効率を比較する．

2 再構成アルゴリズム

本研究では，図 1 に示した第三世代ファンビームを用いた測定の場合について検討を行う．

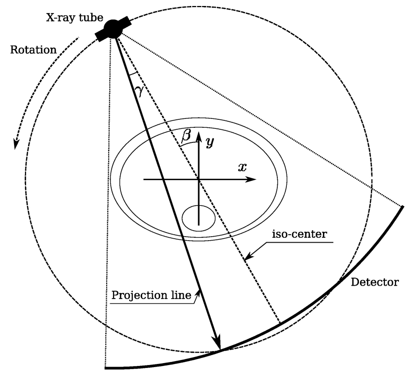


図 1 第 3 世代 X 線 CT の幾何構造

2.1 二乗誤差法に基づくアルゴリズム

撮像対象空間を P とし，その中の点を $\boldsymbol{x}(\in P)$ とする．また，そこでの減弱係数の分布を，$\mu(\boldsymbol{x})$ と表す．撮像空間を離散化し，画素数 N_p の画像とみなした場合，投影データは，

$$s(\tau) = \sum_{j=1}^{N_p} \mu(\boldsymbol{x}_j) d(\boldsymbol{x}_j, \tau) \tag{1}$$

となる．ここで，j は画素を表すインデックスであり，$\boldsymbol{x}_j$ は j 番目の画素の実空間上での座標を表す．$d(\boldsymbol{x}, \tau)$ は測定位置 τ において投影ラインが $\boldsymbol{x}$ の画素を通過する距離である．

式 (1) は行列形式で，

$$\begin{bmatrix} d(\boldsymbol{x}_1,\tau_1) & \cdots & d(\boldsymbol{x}_{N_p},\tau_1) \\ d(\boldsymbol{x}_1,\tau_2) & \cdots & d(\boldsymbol{x}_{N_p},\tau_2) \\ \vdots & & \vdots \\ d(\boldsymbol{x}_1,\tau_{N_T}) & \cdots & d(\boldsymbol{x}_{N_p},\tau_{N_T}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu(\boldsymbol{x}_1) \\ \mu(\boldsymbol{x}_2) \\ \vdots \\ \mu(\boldsymbol{x}_{N_p}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s(\tau_1) \\ s(\tau_2) \\ \vdots \\ s(\tau_{N_T}) \end{bmatrix} \tag{2}$$

と書けるから，

$$D\mu = s \tag{3}$$

と略記する．また，D の各 i 行目の横ベクトルを d_i と表す．

最小二乗の概念に基づいた求解方法は具体的には，評価量

$$J = \frac{1}{2}||D\mu - s||^2 \tag{4}$$

を最小にするような μ を求める方法であり，μ について微分した値が 0 となる点が最小となる．すなわち，

$$D^T D\mu = D^T s \tag{5}$$

を μ について求解する事に相当する．しかしながら、システム行列 $(D^T D)$ が悪条件となる場合に再構成画像の画質が悪化するという問題があった．これに対して，最小二乗法の問題を解決する一般的方法として特異値分解が知られているが，本研究ではこれに基づいた再構成法を提案する．システム行列 $(D^T D)$ は，

$$D^T D = U\Sigma V^T \tag{6}$$

の様に，直交行列 U, V そして，システム行列の特異値を対角成分に持つ対角行列 Σ に分解される．特異値分解の後，特異値に基づいたシステム行列から雑音成分の除去を行う事で，

$$D^T D\mu = D^T s \leftrightarrow U_d SV\mu = D^T s \leftrightarrow \mu = V^T SU^T D^T s \tag{7}$$

のように減弱係数分布を推定する．

2.2 尤度に基づく逐次アルゴリズム [3]

X 線の観測において，測定値はポアソン分布に従うことが知られている．すなわち，測定値のモデル $I_m(\tau)$ は確率変数として，

$$I_m(\tau) = \mathrm{Poisson}\left[I_e(\tau)\exp\Big(-s(\tau)\Big)\right] \tag{8}$$

と記述される．一方，$\hat{I}_m$ を再構成像から求められる測定値として，

$$\hat{I}_m(\tau) = I_e(\tau)\exp\Big(-s(\tau)\Big) \tag{9}$$

で与えるものとする．これらを用いて尤度は，

$$L = \sum_{i=1}^{N_T} I_m(\tau_i)\log\hat{I}_m(\tau_i) - \hat{I}_m(\tau_i) - \log I(\tau_i)! \tag{10}$$

で与えられる．再構成は，

$$\max_{\mu} L \qquad \text{subject to } \mu(\boldsymbol{x}_j) > 0, j \in \{1, 2, \ldots, N_p\} \tag{11}$$

の様に尤度最大化により実現される．以下これを尤度法と記す．

3 実験設定

X 線源から 1 スキャン中に照射される X 線の総光子数を $\{8\times10^7, 8\times10^8, 8\times10^9\}$ [photons/scan]，γ 方向及び回転角度 β の分割数 N_γ, N_β を，$\{16, 32, 64\}$，$\{16, 32, 64\}$, そして撮像空間分割数を 16×16,24×24,32×32 とし，すべての組み合わせについて投影測定シミュレーション及び再構成を行う．再構成画像の画質は，

$$E = \sqrt{\frac{1}{N_p}\sum_{x\in P}\left(\widehat{\mu}(x) - \mu(x)\right)^2} \tag{12}$$

と定義した平均二乗誤差 E により定義する．ここで，$\widehat{\mu}$ は推定された減弱係数，μ は真の減弱係数，N_p は P の全要素数である．本研究では，提案手法の実用上の効率を評価するため，ここでは尺度として，

$$R = \tau_{proc} \cdot E \tag{13}$$

を用いる．ここで τ_{proc} は，推定に要した計算時間である．この尺度は，値が小さいほど効率が良い事を意味している．

4 数値実験

図 2 に用いた数値ファントムを示す．撮像空間の領域の大きさを 30 [cm]× 30 [cm] と設定する．測定対象としたファントムは，評価のため単純に水で満たされた半径 (r)14.4 [cm] 程度の球体を想定する． 図 3 と図 4 は画素数 24×24，観測総数

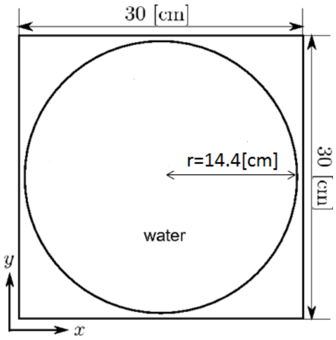
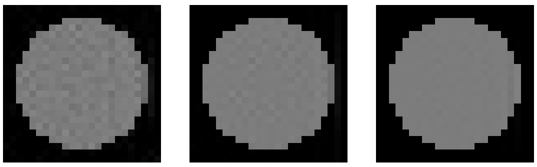


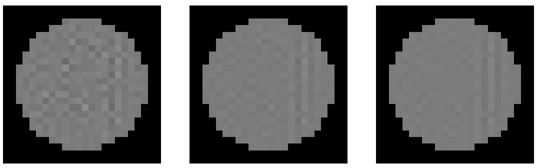
図 2 測定対象としたファントム

$N_T = N_\gamma \times N_\beta = 32 \times 32 = 1024$ の場合の特異値分解法及び尤度法による再構成画像結果，図 5 はこの場合における X 線光子数に従った計算効率の尺度 R の変化のグラフであり、図 6 と図 7 は画素数 32×32，観測総数 $N_T = N_\gamma \times N_\beta = 32 \times 16 = 512$ の場合の特異値分解法及び尤度法による再構成画像結果，図 8 はこの場合における X 線光子数に従った計算効率の尺度 R の変化のグラフである．



8.0×10^7 8.0×10^8 8.0×10^9

図 3 画素数 24×24,$N_T = 1024$ の場合において特異値分解による再構成結果



8.0×10^7 8.0×10^8 8.0×10^9

図 4 画素数 24×24,$N_T = 1024$ の場合において尤度法による再構成結果

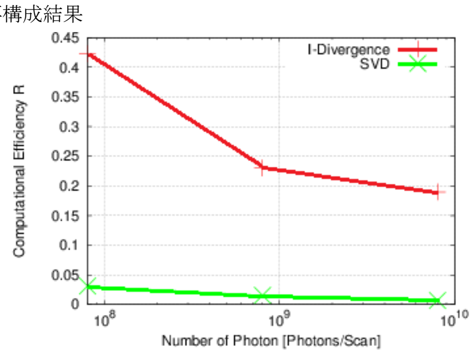
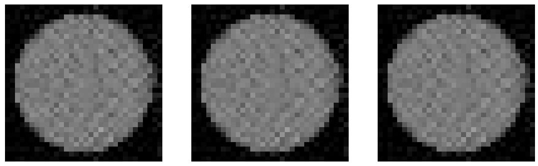


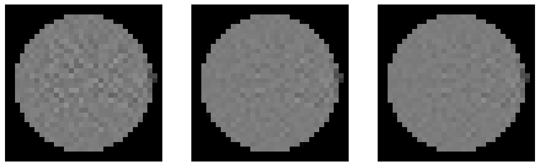
図 5 画素数 24×24,$N_T = 1024$ の場合において画素数の場合における計算尺度 R の変化

図 3，図 4 と図 5 から特異値分解法の方が良い性能を持つ事を確認でき，その効率の差は照射光子数が低くなると増大する傾向にある．これは，逐次再構成である雑音に対して感度が低い事により，その雑音性分が増大することで相対的に更新量が低下する事に原因であると考えられる．図 6，図 7 と図 8 を見ると特異値分解法より尤度法の方が良い結果を示しておる．これは，システム行列の大きさが全画素数の増大に合わせて二乗のオーダーで増大するため，特異値分解に要する計算量もそれに合わせ増大する事が原因と考えられる．



8.0×10^7 8.0×10^8 8.0×10^9

図 6 画素数 32×32,$N_T = 512$ の場合において特異値分解による再構成結果



8.0×10^7 8.0×10^8 8.0×10^9

図 7 画素数 32×32,$N_T = 512$ の場合において尤度法による再構成結果

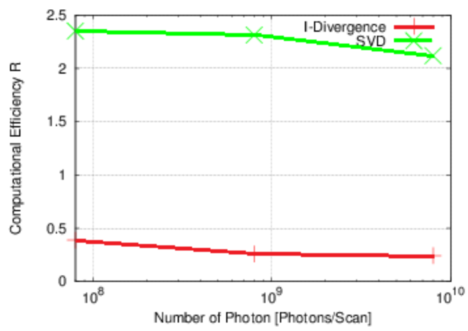


図 8 画素数 32×32,$N_T = 512$ の場合において画素数の場合における計算尺度 R の変化

5 おわりに

X 線 CT の測定値はポアソン分布に従うことから尤度が適していると考えられるが，画素薄が比較的少ない場合，すなわち，照射光子数及び観測総数が十分にある状態において特異値分解を導入した二乗誤差基準が尤度より効率良くなる場合が存在するた．一方，画素数が多くなると逆転する．今後はその理論を構築する必要がある．

参考文献

[1] 篠原，中世，坂本，橋本：逐次近似画像再構成の基礎，医療科学社，2013

[2] 柳井，竹内：射影行列・一般逆行列・特異値分解，東京大学出版会,2000

[3] J.A.O'Sullivan,J.Benac, Alternationg minimization algorithms for transmission tomographa, IEEE Trans. Med. Imasing, Vol.26, No.3, pp.283-297,2007