有限長の Polar 符号によって得られる符号化の量子利得

情報科学科　岩田 直樹　　　指導教員：臼田 毅

1　はじめに

Polar 符号は Arikan によって提案された通信路符号化法で，逐次除去復号との組み合わせにより符号長無限の極限において通信路容量を達成するため，注目されている [1]．最近，古典–量子通信路でも同様の結果が示された [2]．本稿では，Polar 符号の符号長が有限である場合について，量子最適復号を用いて相互情報量を計算し，他の符号と比較することで有限長の Polar 符号による符号化の量子利得特性を考察する．

2　Polar 符号の構成

Polar 符号は符号長が 2 の整数べき乗の符号であり，再帰的に構成可能である．符号長 2^n の Polar 符号の生成行列 G_{2^n} は

$$G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$G_{2^n} = (I_{2^{n-1}} \otimes G_2) R_{2^n} (I_2 \otimes G_{2^{n-1}}) \tag{2}$$

と定義される．ただし，R_{2^n} は

$$\begin{aligned}&(x_0, x_1, \cdots, x_{2^n-1}) R_{2^n} \\ &\quad = (x_0, x_2, \cdots, x_{2^n-2}, x_1, x_3, \cdots, x_{2^n-1})\end{aligned} \tag{3}$$

と定義される置換行列である．

式 (2) で定義された生成行列 G_{2^n} は $2^n \times 2^n$ の行列なので符号化率は 1 になる．そのため，Polar 符号では入力ビットのいくつかの成分を 0 と決める．このように，成分 0 と決めたビットを凍結ビットと言う．ここでは，簡単のため，生成行列の行成分に 1 が少ない行と対応する入力ビットを凍結ビットとしている．

3　SRM と相互情報量

本稿では，量子一括測定に SRM を用いる．SRM は，2 元線形符号に対して，符号語の先験確率が等確率のときに，誤り率が最小となることが示されている．

古典符号 C とそれに対応する量子状態の集合 $\{|v_i\rangle \mid v_i \in C\}$ に対して，SRM を用いた時の通信路行列 $P(j|i)$ は信号系の内積を要素とするグラム行列 Γ を用いて以下のようになる．

$$(\Gamma)_{i,j} = \kappa^{d_{\mathrm{H}}(v_i, v_j)} \tag{4}$$

$$P(j|i) = |(\Gamma)^{\frac{1}{2}}_{i,j}|^2 \tag{5}$$

ここで，$d_{\mathrm{H}}(v_i, v_j)$ は古典符号語 v_i と v_j のハミング距離，κ はレター状態 $|0\rangle$ と $|1\rangle$ の内積である．式 (5) の $P(j|i)$ を用いて古典符号 C の相互情報量 $I(X^n; Y^n)$ は以下のようになる．

$$I(X^n; Y^n) = \sum_{i,j} p(i) P(j|i) \log_2 \frac{P(j|i)}{\sum_k p(k) P(j|k)} \tag{6}$$

ただし，$p(i)$ は符号語 v_i の生起確率である．

4　量子利得についての考察

量子通信路では情報量規準での符号化の量子利得が存在する．これは符号長 n の通信路容量 C_n と符号長 1 の符号の通信路容量 C_1 との間に $C_n/n > C_1$ の関係があることを言う．以下では，Polar 符号によって得られる量子利得についての結果を示す．本稿では符号長 32 と 128，1024 の Polar 符号とそれらと同程度の符号長の Simplex 符号を比較している．Simplex 符号は符号長の長い場合にも相互情報量が計算できることから，従来研究にも符号長が長い場合に得られる利得の例のために用いられてきた符号である [3]．

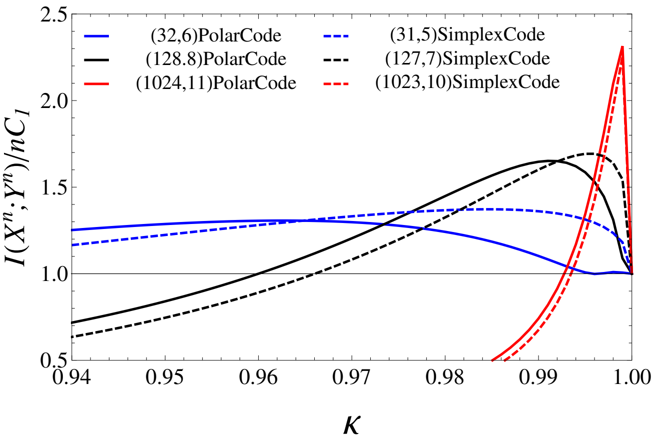

図 1　Polar 符号と Simplex 符号の比較

図 1 では横軸を κ とし，縦軸を各符号の符号長 1 あたりの相互情報量と符号長 1 の符号の通信路容量 C_1 の比として示した．結果を見ると，符号長を伸ばすことによって得られる利得のピークも高くなっており，さらに，Simplex 符号に勝っている箇所も見ることができる．このことから，Polar 符号は符号長を伸ばすことによって得られる利得が増し，その性能も評価できる値であることが分かった．

5　まとめ

Polar 符号に SRM を適用した場合の相互情報量を計算した．その結果，符号長が 32，256，1024 という有限長の場合において，Polar 符号は良い性能を示すことから，Polar 符号は符号長有限の実際的な古典–量子通信路にも有用であることが示唆できた．今後，量子逐次除去復号を用いた場合の性能も調べ，今回の研究で用いた SRM の場合との性能の比較を行う．

参考文献

[1] E. Arikan, IEEE Trans. Inf. Theory **55**, pp.3051-3073, (2009).

[2] M. M. Wilde, S. Guha, IEEE Trans. Inf. Theory **59**, pp.1175-1187, (2013).

[3] 佐原僚介, 林祐一, 宇佐見庄五, 臼田毅, 内匠逸, 電学論 (C), pp.1743-1744, (2008).

公表論文

[1] **岩田直樹**, 他, 平成 25 年度東海支部連合大会, 講演論文集, K1-5, (2013).

[2] **岩田直樹**, 他, 第 36 回情報理論とその応用シンポジウム (SITA2013), 予稿集, pp.463-467, (2013).