ストークス流れに対する任意多点差分法の定性的評価

情報科学部 情報システム学科　杉浦 祐介　　　指導教員：代田 健二

1　はじめに

本研究では，高精度数値解法である任意多点差分法 [1] の定性的評価を，計算力学において最も使用されている方法の一つである有限要素法 [2] を用いて行う．$\Omega \subset \mathbb{R}^n (n \geq 2)$ を区分的に滑らかな有界領域とし，$\partial\Omega$ を境界とする．このとき，本研究では次のストークス流れ問題を評価対象とする．

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{Re}\Delta \boldsymbol{u} + \nabla p = \boldsymbol{f} & \text{in } \Omega, \\ \mathrm{div}\boldsymbol{u} = 0 & \text{in } \Omega, \\ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{g} & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

ただし，Re はレイノルズ数であり，$\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_n)^T$ は速度ベクトル，$\boldsymbol{g}$ は与えられたベクトル値関数とする．

2　任意多点差分法

ストークス流れ問題への任意多点差分法の適用は，渡辺 [3] により行われている．$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}), p(\boldsymbol{x}))^T \in \mathbb{R}^{n+1}$ とし，ストークス方程式の左辺を微分作用素

$$\tilde{P}(\partial_x)\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{Re}\Delta \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) + \nabla p(\boldsymbol{x}) \\ \mathrm{div}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} & , \boldsymbol{x} \in \Omega, \\ \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \\ \frac{\partial p}{\partial \nu}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} & , \boldsymbol{x} \in \Gamma, \end{cases}$$

で表す．このとき，重み行列 $W_{ji} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ を用いて，求積点 $\boldsymbol{x}^{(j)} (\boldsymbol{x}^{(i)} \neq \boldsymbol{x}^{(j)} (i \neq j))$ 上で次のように近似する．

$$\tilde{P}(\partial_x)\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}^{(i)}) \approx \sum_{j=1}^{N} W_{ji}\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}^{(j)}) \quad (i = 1, 2, \cdots, N).$$

ここで重み行列 $\widetilde{W} = (W_{ji})$ は，上式が $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x})$ の指数関数補間に対して真に等しくなっているように選ばれている．$\boldsymbol{F} = (\widetilde{P}(\partial_x)\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}^{(i)}))$，$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}^{(j)})$ と置くと，任意多点差分法により近似解を求める連立一次方程式は，次の通りである．

$$\tilde{W}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{F}.$$

3　有限要素法

有限要素法では (1) の弱形式に対して，領域を小領域に分割して得られた要素で定義した基底を用いて，近似された関数を代入することで連立一次方程式を得て，それにより近似解を得る．$\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ on $\partial\Omega$ となる任意の関数とし，(1) 式にそれぞれ掛けて Ω で積分することにより，$\forall(\boldsymbol{v}, q)$ に対して以下の弱形式が得られる．

$$\begin{cases} a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{v}, p) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}), \\ b(\boldsymbol{u}, q) = 0. \end{cases}$$

ただし，

$$a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \sum_{i=1}^{u} \int_\Omega \nabla \boldsymbol{u}_i \cdot \nabla \boldsymbol{v}_i dx, \ \ b(\boldsymbol{u}, q) = -\int_\Omega \mathrm{div}\boldsymbol{u} \cdot q dx.$$

実際の計算では，ペナルティ関数法 [2] を使用する．

4　数値実験と考察

数値例として，長方形領域 $(0,1) \times (0,1)$ におけるキャビティ流れ [4] に対する結果を示す．有限要素法による計算は，FreeFem + +[5] を用いた．

図 1 は要素分割 100×100 の有限要素法，図 2 は求積点数 50×50 の 10 進 300 桁における任意多点差分法により得られた流線図である．概形は概ね良好な一致をしていることから，工学上の問題に対しても，任意多点差分法は従来法と同様の結果が得られることを示唆している．今後の課題は，より工学的な問題に対して，任意多点差分法の定性的評価を進めることである．

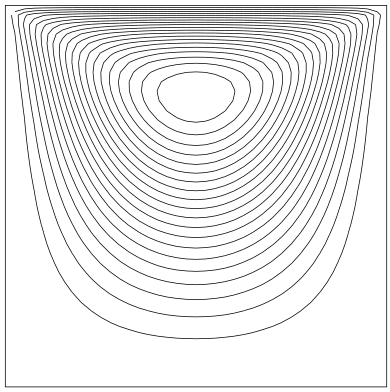

図 1　キャビティ流れの流線 (有限要素法)

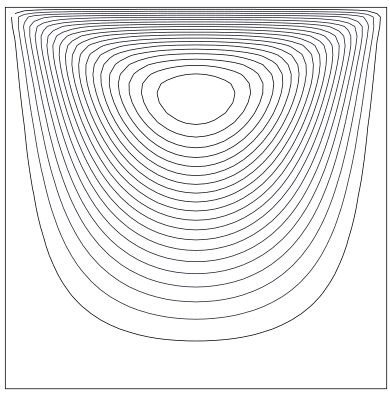

図 2　キャビティ流れの流線 (任意多点差分法)

参考文献

[1] K. Iijima, Application of High Order Finite Difference Approximation as Exponential Interpolation, Theoretical and Applied Mechanics Japan, Vol.53, pp.239–247, 2004.

[2] 中山司，流れ解析のための有限要素法入門，東京大学出版会，2008.

[3] 渡邉祥，多倍長環境下におけるストークス流れに対する高精度数値解法，平成 24 年度愛知県立大学情報科学部卒業論文，2013.

[4] 大西和榮，パソコンによる流れ解析，朝倉書店，1986.

[5] FreeFem++，`http://www.freefem.org/ff++/`