

量子-古典ハイブリッド計算の提案とその線形方程式の解法への適用

情報科学科 高比良 宗一

指導教員：白田 毅

1 はじめに

ある問題の解 $(x_1, x_2, \dots, x_N)^T$ を量子状態 $|x\rangle$ に対応させ、量子計算により $|x\rangle$ を求めることを考える。量子状態 $|x\rangle$ から x_1, x_2, \dots, x_N を求めるには、量子状態から少なくとも $O(N)$ 回の測定が必要になる。そのため量子計算の優位性がなくなる恐れがある。しかし個々の値 x_1, x_2, \dots, x_N が必要な問題では、やはり求められることが望ましい。そこで量子計算により解の部分的な情報 x_k を量子振幅推定法 [1] などにより求め、 x_k を用いて古典計算により解 x_1, x_2, \dots, x_N を求める量子-古典ハイブリッド計算を提案する。提案手法を適用できる問題に線形方程式 $A\vec{x} = \vec{b}$ を解く問題が挙げられる。解 \vec{x} に対応する $|x\rangle$ を得る量子アルゴリズムが Harrow らによって示されている [2]。提案手法が線形方程式を解く問題について、古典計算のみの解法 (LU 分解) と比べ提案手法が優位であることを示す。

2 Harrow らの量子アルゴリズム

Harrow らの量子アルゴリズム [2] では、線形方程式 $A\vec{x} = \vec{b}$ の解 \vec{x} に対応した量子状態 $|x\rangle$ を得ることができる。ただし係数行列 A は N 次正方行列で疎行列・良条件である。初期状態 $|1\rangle_a|0\rangle^{\otimes t}|b\rangle$ を用意する。第 1 量子ビット $|1\rangle_a$ を Ancilla, 第 2 量子ビット列 $|0\rangle^{\otimes t}$ を Work, 第 3 量子ビット $|b\rangle$ を Input と呼ぶ。初期状態は A の固有ベクトル $|u_j\rangle$ を用いて $\sum_{j=1}^N |1\rangle_a|0\rangle^{\otimes t}\beta_j|u_j\rangle$ と表現できる。この状態に対し、次のアルゴリズムを実行する。

1. 位相推定アルゴリズム $(F^{-1} \otimes I)C(e^{iAt})(H^{\otimes t} \otimes I)$ を Work, Input に適用。
2. 制御-回転演算 $C(R(\lambda^{-1}))$ を Ancilla, Work に適用。
3. 逆位相推定アルゴリズム $(H^{\otimes t} \otimes I)C(e^{iAt})(F \otimes I)$ を Work, Input に適用。
4. Ancilla を計算基底により測定。

$C(U) : |j\rangle|x\rangle \mapsto |j\rangle U^j|x\rangle$ は制御 U 演算と呼ばれる作用素、 H はアダマール作用素、 F は量子フーリエ変換を表す作用素である。逆位相推定アルゴリズムを適用した後の状態は $\sum_{j=1}^N \left(\sqrt{1 - \frac{c_j^2}{\lambda_j^2}} |0\rangle + \frac{c_j}{\lambda_j} |1\rangle \right) |0\rangle^{\otimes t} \beta_j |u_j\rangle$ になる。 C は $O(1/\kappa)$ とするように入れられた定数である。手順 4 にて測定結果が 1 のとき状態は $\sum_{j=1}^N \frac{c_j}{\lambda_j} |1\rangle_a |0\rangle^{\otimes t} \beta_j |u_j\rangle = |1\rangle_a |0\rangle^{\otimes t} |x\rangle$ になり、解 \vec{x} に対応した量子状態 $|x\rangle$ を得る。測定結果が 0 のとき失敗する。そのため、確実に 1 が得られるように量子振幅増幅法 [1] を用いることが示されている。計算量は位相推定部分に $O(\log Ns^2\kappa/\epsilon)$ 、量子振幅増幅法に $O(\kappa)$ がかかるため、合計 $O(\log Ns^2\kappa^2/\epsilon)$ の計算量がかかる。 s は列あたりの非ゼロ要素数で、 κ は A の条件数、 ϵ は位相推定部分における推定誤差である。

3 量子振幅推定法

Harrow らの解法を実現するユニタリ行列を U_A とする。量子振幅推定法は、量子状態 $|x\rangle = U_A|0\rangle$ から任意の振幅の絶対値 $|x_k|$ を推定する量子アルゴリズムである [1]。初期状態 $|0\rangle_a^{\otimes m}|x\rangle$ を用意する。この状態に次のアルゴリズムを実行する。

1. 量子フーリエ変換 F を Ancilla に適用。
2. 制御 Q 演算 $C(Q)$ 。
3. 量子フーリエ逆変換 F^{-1} を Ancilla に適用。
4. Ancilla を計算基底により測定。

ここで、 $Q = -U_A(I - 2|0\rangle\langle 0|)U_A(I - 2|k-1\rangle\langle k-1|)$ である。測定結果を y とし、 $|x_k| = \sin^2(\pi y/2^m)$ と推定する。量子振幅推定法は Q を m 回施す。したがって、 $O(\log Ns^2\kappa/\epsilon)$ となる。推定誤差は振幅の絶対値 $|x_k|$ の推定値を $|\tilde{x}_k|$ とすると、 $||x_k|^2 - |\tilde{x}_k|^2| \leq \pi/|2^m| + (\pi/|2^m|)^2$ により評価できる。

4 量子-古典ハイブリッド計算

量子-古典ハイブリッド計算を線形方程式の解法に適用するとき、はじめに、Harrow らの量子アルゴリズムを用いて量子状態 $|x\rangle$ を求める。つぎに、量子振幅推定法を用いて $|x_k|$ を求める。 $|x_k|$ から x_k を求める必要がある。線形方程式の k 行目に注目し $\sum_{j=1}^s \text{sgn}(x_k)a_{kj}|x_j\rangle = b_k$ を得る。この式を満たすように $|x_j\rangle$ を量子計算で求め、 $\sum_{j=1}^s \text{sgn}(x_k)a_{kj}|x_j\rangle - b_k$ が 0 となるように $\text{sgn}(x_j)$ を求める。 x_k から \vec{x} を求めることについて、サイズが 4×4 の線形方程式 $A\vec{x} = \vec{b}$ を例にして説明する。 $A = [a_{ij}]$, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ とする。量子計算により x_3 を求め各行の x_3 項を右辺へ移項する。すると 4 つの方程式に対して変数が 3 つより、方程式を 3 つ選択して考えることができる。1, 3, 4 列目を選択したとき線形方程式

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - a_{13}x_3 \\ b_3 - a_{33}x_3 \\ b_4 - a_{43}x_3 \end{pmatrix} \quad (1)$$

を考えるだけで良い。係数行列に注目する。次式のように a_{23} に注目して 2 行目と 3 列目を削除している。

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ \hline a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{array} \right) \quad (2)$$

削除後の行列が対角行列などになるように行と列を削除することで \vec{x} を求めることができる。提案手法と古典計算のみの解法である LU 分解と比較する。LU 分解では $A = LU$ と分解するとき、行列 L, U の要素を新たに求める必要がある。このとき、0 に非常に近い値で除算をすることにより、行列 L, U の要素が不安定になる恐れがある。また、記憶する要素が増える fill-in が発生する。一方、提案手法では行列 A から新たに成分を求める必要はない。そのため、0 に非常に近い値で除算する可能性が少なくなるという意味で安定であり、また fill-in の問題は発生しない。計算量は行列を分解しない分、削減することができる。

5 まとめと今後の課題

量子計算と古典計算を組み合わせた量子-古典ハイブリッド計算を提案し、疎行列・良条件な行列を係数とする線形方程式に適用した。そして、提案手法が数値的安定性や fill-in において優位であることを示した。今後の課題として、量子-古典ハイブリッド計算が優位になる応用例を探すことや、求められる精度や計算量についての考察などが挙げられる。

参考文献

- [1] G. Brassard, *et al.*, AMS, Contemp. Math. **305**, pp.53-74, (2002).
- [2] A.W. Harrow, *et al.*, Phys. Rev. Lett. **103**, 150502, (2009).

公表論文

- 1) 高比良宗一, 佐々木大地, 曾我部知広, 白田毅, 平成 26 年度電気・電子・情報関係学会東海支部連合大会, M5-3, (2014).
- 2) 高比良宗一, 佐々木大地, 曾我部知広, 白田毅, 第 37 回情報理論とその応用シンポジウム (SITA2014), pp.679-683, (2014).