

# ペトリネットを用いた量子回路のモデル化と解析に関する研究

村主 健太

指導教員：辻 孝吉

## 1 はじめに

ペトリネットを拡張したモデル[1]を使用することで量子システムをモデル化・解析可能であることが知られている[2]。本研究では、量子コンピュータを設計するための量子回路にペトリネット(PN)を応用しネット構造として表現、解析するためのモデルとして量子回路ネット(QCN)および部分系階層化量子回路ネット(HQCN)を提案し、HQCNにおける部分系同士のエンタングルメント解析法、QCNにおける制御ユニタリゲートの設計法を示す。

## 2 QCN の提案

本章では量子回路をネット構造で表現するためのモデル、QCNを提案する。量子回路では、量子状態をベクトル、量子状態の遷移を行列で表した以下のような数理モデルで表現される。

$$|\psi_{out}\rangle = (H \otimes I) \cdot CNOT|\psi_{in}\rangle \quad \dots (1)$$

上式における行列( $H \otimes I$ ),  $CNOT$ は各段階の処理を表しており、量子ゲートと呼ばれ、量子回路は基本処理(量子ゲート)の組み合わせで構成される。また、量子回路は量子ゲートおよび状態の最小構成である量子ビットの図表現から成る量子回路図(図1)としても表される。

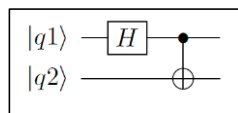


図1 量子回路図

式1および図1のような量子回路をQCNでモデル化したものを図2に示す(ネット要素との対応詳細は修論参照)。

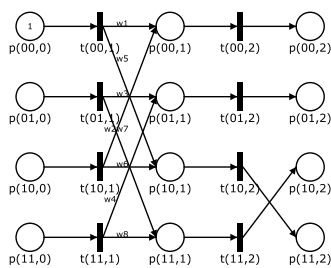


図2 図1のQCNモデル

図2のQCNにおいて円(プレース)内の数字は各処理段階における基底の確率振幅(係数)を表している。また、図の棒はトランジションと呼び、これを発火させると入力プレースから係数が除かれ、係数に出力アーク(矢印)に付記された重みが乗じられた値が出力プレースに加えられる。QCNにおいてはトランジションの(ラベルの)第2項の等しいものを全て発火させることで量子回路の1つの段階の状態遷移が表現される。ここで、図2の初期状態(マーキング)は $M(0) = [1, 0, 0, 0]^T$ で表され、2つ遷移段階(ステージ)を経た後のマーキングは $M(2) = [1/\sqrt{2}, 0, 0, 1/\sqrt{2}]^T$ となり、これは式(1)において $|\psi_{in}\rangle = M(0)$ としたときの出

力状態 $|\psi_{out}\rangle$ と一致する。したがってQCNの状態遷移は量子回路の状態遷移と等価である(等価性証明は修論参照)。

## 3 HQCN の提案

本章では、量子回路における部分系同士の関係に着目し解析するためのモデル、HQCNを提案する。2量子ビット以上からなる量子回路では、全体を1量子ビット以上からなる複数の部分系(レジスタ)とよばれるグループに区分し、量子ゲートにより生まれる各部分系同士の相関関係(量子相関)を計算のリソースに用いる。そこで、QCNでは全体系の基底を表していたプレースを部分系の基底を表すものとし、全体系の状態を各部分系から階層的にとらえることを可能とした。HQCNでは、以下のような2量子ビットの量子回路、

$$|\psi_{out}\rangle = CNOT|\psi_{in}\rangle \quad \dots (2)$$

において、各量子ビットを2つの部分系とみなした場合のネット構造を以下のように表現する。

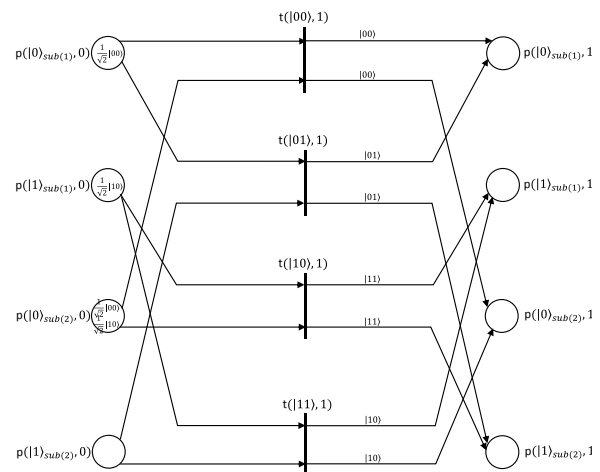


図3 式2のHQCNモデル

図3において各遷移段階の状態を表す4つのプレースのうち上の2つは1つ目の部分系( $Sub_1$ )、下の2つは2つ目の部分系( $Sub_2$ )の各基底を表している。また、図3の初期マーキングは $M(0) = [1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}, 0]^T$ で表され、状態遷移後のマーキングは、 $M(1) = [1/\sqrt{2}, 0, 0, 1/\sqrt{2}]^T$ となり、これも式(2)における $|\psi_{in}\rangle$ ,  $|\psi_{out}\rangle$ と一致するため、量子回路とHQCNの状態遷移は等価であるといえる(等価性証明は修論参照)。

## 4 HQCNにおける部分系エンタングルメント解析法

本章では、前章で提案したHQCNにおいて部分系同士の関係であるエンタングルメントを解析する方法を提案する。量子回路(コンピュータ)では、状態から得た値(物理量)と情報を紐づける操作を観測と呼び、得られる値(観測値)は量子力学の規約により確率的に与えられる。HQCNにおいて部分系 $Sub_i$ の観測では、基底 $|e_{sub(i)}\rangle \in Sub_i$ に1対1に対応する観測値が確率的に得られ、その観測確率は、プレースのマーキングを用いて、

$$P(|e_{sub_i}\rangle) = \|M(p(|e_{sub(i)},s))\|^2 \quad \dots (3)$$

つまり、対応するプレースの 2 乗ノルムで与えられる。  
また、観測後の HQCN のマーキングは、

$$M(s)_{obs(|e_{sub(i)}\rangle)} = \frac{1}{\|M(p(|e_{sub(i)},s))\|} M(p(|e_{sub(i)},s)) \quad \dots (4)$$

で与えられる。これらの定義を用いて以下のような定理を導出した(証明は修論参照)。

**定理 1: HQCN エンタングルメント十分条件**

$n$ 個の部分系から成る HQCN において、現行マーキングが  $M(s)$  で与えられているとき、 $M(s)$  における任意の部分系  $Sub_i$  の基底  $|e_{sub(i)}\rangle$  (に対応する観測値) の観測確率を  $P(|e_{sub(i)}\rangle)$  とし、 $M(s)$  において  $Sub_i$  と異なる部分系  $Sub_j (j \neq i)$  の観測により得られる部分系観測後マーキング  $M(s)_{obs(|e_{sub(j)}\rangle)}$  における  $|e_{sub(i)}\rangle$  の観測確率を  $P(|e_{sub(i)}\rangle; |e_{sub(j)}\rangle)$  としたとき、

$P(|e_{sub(i)}\rangle; |e_{sub(j)}\rangle) \neq P(|e_{sub(i)}\rangle)$  となる  $|e_{sub(i)}\rangle, |e_{sub(j)}\rangle$  の組が存在すれば、 $M(s)$  はエンタングルド状態である。

定理 1 の十分条件を用いて、HQCN の現行マーキングにおける部分系同士のエンタングルメント解析アルゴリズムを提案した(アルゴリズムは修論参照)。解析例として、3 つの 1 量子ビット部分系から成る HQCN のマーキングが、図 4 のように与えられたとき、の解析結果は表 1 のようになる(トランジション、アークは省略)。

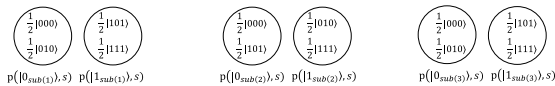


図 4: エンタングルメント解析例

表 1: エンタングルメント解析結果

$Sub_i$ の基底	(2,1)	(2,2)	(3,1)	(3,2)	(2,1)	(2,2)	(3,1)	(3,2)	(3,1)	(3,2)	(3,1)	(3,2)
$Sub_j$ の基底	(1,1)	(1,1)	(1,1)	(1,1)	(1,2)	(1,2)	(1,2)	(1,2)	(2,1)	(2,1)	(2,2)	(2,2)
$P( e_{sub(i)}\rangle)$	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
$P( e_{sub(i)}\rangle;  e_{sub(j)}\rangle)$	0.5	0.5	1	0	0.5	0.5	0	1	0.5	0.5	0.5	0.5

表 1 において、 $Sub_1$  の基底  $|e_{sub(1)}\rangle = |0_{sub(1)}\rangle, |1_{sub(1)}\rangle$  および  $Sub_3$  の基底  $|e_{sub(3)}\rangle = |0_{sub(3)}\rangle, |1_{sub(3)}\rangle$  の間に、

$$P(|e_{sub_3}\rangle; |e_{sub(1)}\rangle) \neq P(|e_{sub_3}\rangle) \quad \dots (5)$$

が成立するため、 $M(s)$  において  $Sub_1, Sub_3$  の間にエンタングルメントが存在することが分かる。また、この解析アルゴリズムの計算量は、部分系の数を  $n$ ,

$$d = \max_{i=1, \dots, n} \dim Sub_i$$

とすると、アルゴリズム中の定理 1 での等号成立判定回数に着目すると、 $O((nd)^2)$  となる。この計算量は、HQCN でモデル化可能な範囲において実用的なものであるといえる。

**5 QCN における制御ユニタリゲートの設計手法**

本章では、2 章で提案した QCN において、量子回路の基

本ゲートの一つである制御ユニタリゲートを設計する方法を提案する。 $n$ 量子ビットの制御ユニタリゲートは、任意個 ( $< n$ ) のポジティブ制御ビット, およびネガティブ制御ビット ( $< n$ ), および 1 量子ビットのターゲットビットを持ち、入力全てのポジティブ制御ビットの状態が  $|1\rangle$  かつ全てのネガティブ制御ビットが  $|0\rangle$  であるときに、ターゲットビットに  $2 \times 2$  のユニタリ作用素  $U$  を適用するようなゲートである。本研究では QCN において設計対象の遷移段階におけるトランジションからプレースに接続するアークおよびその重みを設定することにより、任意の制御ユニタリゲートを設計するアルゴリズムを提案した(アルゴリズムは本文参照)。例として、図 5 のような制御ユニタリゲートを提案アルゴリズムにより設計した QCN を図 6 に示す。

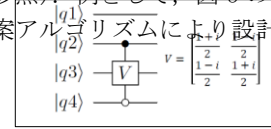


図 5: 制御ユニタリゲートの量子回路

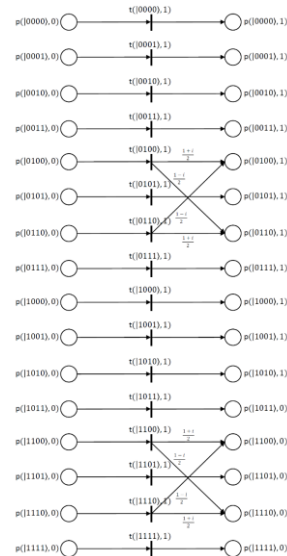


図 6: 図 5 の QCN モデル

ここで、提案アルゴリズムの計算量は、QCN の量子ビット数  $n$  に対し、 $O(2^n)$  となり、(数理モデルによる)従来手法の計算量は  $O(2^{3n})$  であるため、両者とも指数オーダーとなるが提案手法の方が高速であるといえる。

**6 まとめ**

本研究では量子回路をネット構造として表現するモデル、QCN および HQCN を提案し、各モデルにおける設計・解析手法を提案した。今後は、HQCN における量子ゲートの解析や QCN における回路特性の検証について検討し、各モデルのさらなる活用方法を探っていく。

**参考文献**

[1] K. Tsuji and A. Ohta. An extended petri net iii and its applications. In Circuits and Systems, 2001. ISCAS 2001. The 2001 IEEE International Symposium on, Vol. 5, pp. 339-342 vol.5, 2001.  
[2] 伊藤, 太田, 辻. 色つき量子ペトリネットによる量チューリング機械のモデル化と解析(ペトリネット, 離散事象システム, 一般). 電子情報通信学会技術研究報告. CST, コンカレント工学, Vol. 109, No. 73, pp. 53~58, may 2009.