

エネルギー減衰を受けた非最大擬似ベル状態を用いた応用プロトコルの研究

山口 翔太

指導教員：白田 毅

1 はじめに

量子情報システムの重要なリソースとして、量子対に働くエンタングルメントという古典論にはない相関がある。この相関を持つものの中で、擬似ベル状態 [1] はコヒーレント状態などの非直交状態で構成されているにもかかわらず、最大エンタングルメントになるものがあること、また減衰に強い可能性があるとの期待から注目されている。

これまで主に研究の対象とされてきたのは最大エンタングルメントを持つ擬似ベル状態（以下、最大擬似ベル状態と呼ぶ）であった。しかし、最近の研究で量子テレポーテーションにおける現実的な実験スキームにおいて、非最大擬似ベル状態が最大擬似ベル状態よりも優れた特性を持つことがあるということが示された [2]。この結果は、雑音のある通信路の影響に対する耐性は非最大擬似ベル状態が優れている可能性を示唆している。

そこで、本研究では非最大擬似ベル状態を量子デンスコーディングと量子位相推定の 2 つの量子プロトコルに応用した場合について考察する。量子デンスコーディングに関して、最大擬似ベル状態の減衰通信路における通信路容量の特性の研究がなされている [3]。しかし、非最大擬似ベル状態については研究されていない。また量子位相推定について、文献 [4] では Entangled Coherent State (ECS) を用いた場合、最も優れた性能を持つことが示され、さらに文献 [5] では雑音のない通信路において非最大擬似ベル状態を用いた場合に平均光子数が小さい場合に文献 [4] の J.Joo らの ECS よりも優れた性能を持つことが示された。

本研究では減衰通信路を想定し、減衰の影響を受けた非最大擬似ベル状態の特性について考察し、ほかのエンタングルド状態との比較を行う。

2 擬似ベル状態

擬似ベル状態はコヒーレント状態などの非直交状態によって構成されるエンタングルド状態である。振幅 α のコヒーレント状態を $|\alpha\rangle$ と表す。基本量子ビットを $|0_L\rangle = |\alpha\rangle, |1_L\rangle = |-\alpha\rangle$ とすると、擬似ベル状態は以下のように表される [1]。

$$|\Psi_1\rangle = h_1(|\alpha\rangle_A|-\alpha\rangle_B + |-\alpha\rangle_A|\alpha\rangle_B), \quad (1)$$

$$|\Psi_2\rangle = h_2(|\alpha\rangle_A|-\alpha\rangle_B - |-\alpha\rangle_A|\alpha\rangle_B), \quad (2)$$

$$|\Psi_3\rangle = h_3(|\alpha\rangle_A|\alpha\rangle_B + |-\alpha\rangle_A|-\alpha\rangle_B), \quad (3)$$

$$|\Psi_4\rangle = h_4(|\alpha\rangle_A|\alpha\rangle_B - |-\alpha\rangle_A|-\alpha\rangle_B). \quad (4)$$

ここで、 h_i は規格化定数を表す。また、 $|\Psi_{2,4}\rangle$ は最大エンタングルメント 1[ebit] を持つ。

3 擬似ベル状態に対するエネルギー減衰

本研究において、擬似ベル状態がエネルギー減衰の影響を受けた場合を考える。そのために必要な擬似ベル状態の減衰過程の記述について説明する。例として、始めに準備される状態に $|\Psi_1\rangle$ を用いるとする。つぎに、系 A に対してユニタリ作用素 $U(\theta)$ を作用させる。この作用は、量子デンスコーディングでは古典情報を量子状態にのせるためのエンコード処理に相当し、量子位相推定では推定したいパラメータを表すための位相シフト

に相当する。初めの状態は

$$\begin{aligned} |\Psi^{\text{out}}\rangle &= (U(\theta) \otimes I)|\Psi_1\rangle \\ &= \tilde{h}(|\alpha\theta\rangle_A|-\alpha\rangle_B + |-\alpha\theta\rangle_A|\alpha\rangle_B) \end{aligned} \quad (5)$$

となる。ここで、 $U(\theta)|\alpha\rangle = |\alpha\theta\rangle$ であり、 I は系 B に対する恒等作用素である。これは、系 B には何も操作していないことを表す。次に、出力状態の系 A、系 B は減衰通信路を通じてエネルギー透過率 η の減衰の影響を受けるとする。減衰通信路による減衰は、真空場 $|0\rangle_E$ を外部系としてその相互作用として表すことができる。系 A に対する真空場を E_A とすると、その相互作用は

$$\begin{aligned} U_{AE}|\alpha\rangle_A|0\rangle_{E_A} &= |\sqrt{\eta}\alpha\rangle_A|\sqrt{1-\eta}\alpha\rangle_{E_A}, \\ U_{AE}|-\alpha\rangle_A|0\rangle_{E_A} &= |-\sqrt{\eta}\alpha\rangle_A|-\sqrt{1-\eta}\alpha\rangle_{E_A} \end{aligned} \quad (6)$$

となる。また、系 B についても真空場を E_B とすると同様に表される。よって、減衰通信路を通った後の全体の状態は以下のように表される。

$$\begin{aligned} |\tilde{\Psi}^{\text{out}}\rangle_{ABE_AE_B} &= \\ &\tilde{h}(|\sqrt{\eta}\alpha\theta\rangle_A|-\sqrt{\eta}\alpha\rangle_B|\sqrt{1-\eta}\alpha\theta\rangle_{E_A}|-\sqrt{1-\eta}\alpha\rangle_{E_B} \\ &+ |-\sqrt{\eta}\alpha\theta\rangle_A|\sqrt{\eta}\alpha\rangle_B|-\sqrt{1-\eta}\alpha\theta\rangle_{E_A}|\sqrt{1-\eta}\alpha\rangle_{E_B}). \end{aligned} \quad (7)$$

全体の状態から系 A、B の出力状態は、系 E_A, E_B について部分トレースを取ることによって得られる。結果として、最終的な系 A、B の出力状態は

$$\begin{aligned} \rho_{AB} &= \tilde{h}^2(|\sqrt{\eta}\alpha\theta\rangle_A|-\sqrt{\eta}\alpha\rangle_B\langle-\sqrt{\eta}\alpha|_A\langle\sqrt{\eta}\alpha\theta|_B \\ &+ L_1L_2|\sqrt{\eta}\alpha\theta\rangle_A|-\sqrt{\eta}\alpha\rangle_B\langle\sqrt{\eta}\alpha|_A\langle-\sqrt{\eta}\alpha\theta|_B \\ &+ L_1L_2|-\sqrt{\eta}\alpha\theta\rangle_A|\sqrt{\eta}\alpha\rangle_B\langle-\sqrt{\eta}\alpha|_A\langle\sqrt{\eta}\alpha\theta|_B \\ &+ |-\sqrt{\eta}\alpha\theta\rangle_A|\sqrt{\eta}\alpha\rangle_B\langle\sqrt{\eta}\alpha|_A\langle-\sqrt{\eta}\alpha\theta|_B) \end{aligned} \quad (8)$$

となる。ただし、

$$L_1 = {}_{E_A}\langle\sqrt{1-\eta}\alpha| - \sqrt{1-\eta}\alpha\rangle_{E_A}, \quad (9)$$

$$L_2 = {}_{E_B}\langle\sqrt{1-\eta}\alpha| - \sqrt{1-\eta}\alpha\rangle_{E_B}. \quad (10)$$

初めに準備する状態が $|\Psi_2\rangle, |\Psi_3\rangle, |\Psi_4\rangle$ の場合でも同様である。

4 応用プロトコルの特性

前節で求めた減衰を受けた擬似ベル状態を用いた場合の各プロトコルの特性について示す。

4.1 量子デンスコーディング

量子デンスコーディングは量子テレポーテーションと対をなす量子通信プロトコルであり、エンタングルメントを用いることで伝送できる古典情報を増大させることのできる優れたプロトコルである。評価指標としては、通信によってどのくらいの情報が送れるかどうかを評価することが適切である。よって、通信路容量の特性を示すことで比較、考察を行う。エンコード $\mathcal{E}_i^{(A)}$ 、量子状態 $\hat{\rho}^{A\otimes B}$ 、通信路 Φ が与えられた時の通信路容量は以下の式で与えられる。

$$\begin{aligned} C_{\text{ea}}^{(1)}(\{\mathcal{E}_i^{(A)}|i \in \{1, 2, 3, 4\}\}, \hat{\rho}^{A\otimes B}, \Phi) \\ = \max_{\{\xi_i\}} \left\{ S\left(\sum_i \xi_i \hat{\rho}_i^{(A\otimes B)}\right) - \sum_i \xi_i S(\hat{\rho}_i^{(A\otimes B)}) \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

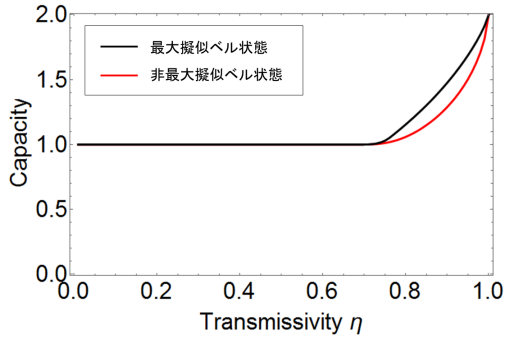


図 1 透過率ごとに振幅を最適化した場合の通信路容量

$S(\hat{\rho}) = -\text{Tr} \hat{\rho} \log \hat{\rho}$ は von Neumann エントロピーであり、 ξ_i は古典情報 i の先験確率である。図 1 は系 A,B においてそれぞれ透過率 η でエネルギー減衰が起きた場合の通信路容量である。縦軸は通信路容量、横軸は通信路の透過率を表す。また、この図は透過率ごとに振幅を変化させ、最も通信路容量が大きくなった時を示している。赤線が非最大擬似ベル状態、黒線が最大擬似ベル状態の通信路容量を示している。両者とも、透過率が 0.7 を超えるところでは通信路容量が 1 を超えていることがわかる。エンタングルメントを使わない場合、通信路容量は最大でも 1 であることから、透過率が 0.7 を超えるところではこのプロトコルは有用であるといえる。また、最大擬似ベル状態と非最大擬似ベル状態の通信路容量を比較してみると、透過率が 0.7 以下の部分では、同じ値を示しているが、透過率 0.7 以上の部分では最大擬似ベル状態が非最大擬似ベル状態より優れた値を示すということが分かった。この結果は、文献 [2] で示唆されていた結果とは異なる結果である。

4.2 量子位相推定

量子推定とは、あるパラメータを量子状態を用いて推定を行うプロトコルである。量子推定において、その推定の精度の良し悪しを考える際、推定量と真の値との平均二乗誤差を最小化する問題を考えることで評価を行う。平均二乗誤差の最小化問題の解は量子 Cramer-Rao 不等式によって与えられる。この時、パラメータ θ に対する推定量の平均二乗誤差、つまり分散 $(\delta\theta)^2$ の下限は以下のように与えられる。

$$(\delta\theta)^2 \geq \frac{1}{F_Q}. \quad (12)$$

ここで、 F_Q は量子 Fisher 情報量である。本研究で考える推定はエンタングルド状態を用いた位相推定であり、推定するパラメータ θ は位相を表す。エンタングルド状態 $\rho(\theta)$ が混合状態の時、量子 Fisher 情報量は以下ようになる [4]。

$$F_Q = \sum_{i,j} \frac{2}{\lambda_i + \lambda_j} |\langle \lambda_i | (\partial\rho(\theta)/\partial\theta) | \lambda_j \rangle|^2. \quad (13)$$

ここで、 $\lambda_i, |\lambda_i\rangle$ はそれぞれ $\rho(\theta)$ の固有値、固有ベクトルである。図 2 は系 A,B がそれぞれ透過率 η でエネルギー減衰が起きた場合の推定限界を示している。この図では、例として始めに準備される状態の平均光子数が 2.0 の場合を示している。縦軸は分散の平方根で、横軸は通信路の透過率を表している。分散が小さいほど、良い性能を示している。それぞれ $\delta\theta_{1,3}$ は $|\Psi_{1,3}\rangle$ 、 $\delta\theta_{2,4}$ は $|\Psi_{2,4}\rangle$ 、 $\delta\theta_J$ は J.Joo らの ECS [4] の推定限界を表して

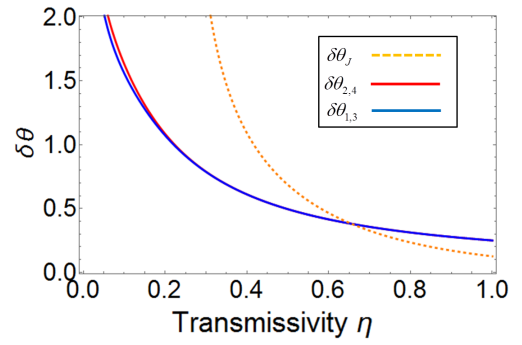


図 2 平均光子数 2.0 の場合の推定限界の比較

いる。また、J.Joo らの ECS は

$$|\Psi_J\rangle = h_J(|\alpha\rangle_A |0\rangle_B + |0\rangle_A |\alpha\rangle_B) \quad (14)$$

と表され、 h_J は規格化定数である。この図の場合では、透過率 0.7 付近までは J.Joo らの ECS の推定限界が最も低い値を示しているが、透過率 0.7 より小さい領域では $|\Psi_{1,3}\rangle$ の推定限界と $|\Psi_{2,4}\rangle$ の推定限界が J.Joo らの ECS の推定限界を下回る値を示していることが分かる。また、透過率 0.3 より小さい領域では、 $|\Psi_{1,3}\rangle$ の推定限界が $|\Psi_{2,4}\rangle$ の推定限界を下回る値を示している。つまり、減衰が起きて平均光子数が小さくなると、 $|\Psi_{1,3}\rangle$ の推定限界が最も良い性能を示すということが分かった。

5 まとめ

本研究では、非最大擬似ベル状態について着目し、量子デンスコーディングと量子位相推定に応用した場合の減衰通信路の影響を受けた場合の考察を行った。その結果、量子デンスコーディングにおいては減衰の影響を受けた場合に、最大擬似ベル状態の方が非最大擬似ベル状態を上回る性能を持つことを示した。つまり、文献 [2] において示唆されていた結果とは異なる結果が得られた。また、量子位相推定においては減衰の影響を受けて平均光子数が小さくなった場合に、非最大擬似ベル状態が J.Joo らの ECS や最大擬似ベル状態を超える最も優れた性能を持つことを示した。今後、非最大擬似ベル状態についてさらに別のプロトコルに応用した場合についての考察や、本研究の結果をさらに分析し、プロトコルの性能に何が影響しているのかを考察していくことが考えられる。

参考文献

- [1] O. Hirota and M. Sasaki, Proc. QCMC-Y2K, pp.359-366, (2001).
- [2] H. Prakash and M.K. Mishra, quant-ph/1107.2533, (2011).
- [3] H. Takeuchi, S. Yamaguchi, and T.S. Usuda, Proc. 1st International Workshop on ECS and Its Application to QIS, pp.115-119, (2013).
- [4] J. Joo, W. J. Munro, T. P. Spiller, Phys. Rev. Lett. 107, 083601, (2011).
- [5] 村上 弾, 第 35 回情報理論とその応用シンポジウム, (2012).

公表論文

- 1) S. Yamaguchi and T.S. Usuda, Extended Abstracts of AQIS2013, pp.213-214, (2013.8).
 - 2) 山口翔太, 白田毅, 平成 25 年度電気関係学会東海支部連合大会, (2013.9).
- 他 4 件