

確率ペトリネットの差分方程式近似における誤差の軽減に関する研究

グエン ビェト キエン

指導教員：太田 淳

1 はじめに

確率ペトリネットはシステムのモデル化、評価のための有効なツールの1つである。一般化確率ペトリネットモデルの作成・シミュレーションを行うペトリネットツールの一つである DaNAMiCS を用いて、システムのワークフローをシミュレーションを行った。[6]

しかし、シミュレーションの結果は、十分に時間が経った定常状態を与えるものの、それ以前の過渡状態が検証できない。また、ペトリネットは離散状態を持つシステムに有効なツールであるが、システムの規模が大きくなると状態空間爆発という問題が発生する。そこで、流体化という手法を用いて差分方程式近似を行うことで、その問題を解消でき、過渡状態も検証することができる [2]。一方、流体化による誤差が大きいことが指摘されており、誤差の縮小方法を検討が行われている。ガウスホワイトノイズを追加することで、誤差を縮小することができる [5] が、時間トランジションを持たないペトリネットにしか適用できない。そのために、一般化確率ペトリネットを適用できるように、拡張を行う。

2 ペトリネット

ペトリネット [3] は離散事象システムのモデルのひとつであり、**プレース**と**トランジション**という二種類のノードをもつ二部有向グラフである。システムは必ずしも決定論的な挙動を示すわけではなく、確率によって挙動が分岐する場合もある。そのようなシステムをモデル化するペトリネットのひとつに確率ペトリネットがある。確率ペトリネットは遅延が確率的に規定され、各トランジションに、トランジションも発火が可能になったときから発火までの遅延を表す指数分布確率変数を関連づけたペトリネットである。いくつかのトランジションが同時に、発火可能となった場合には、最も短い遅延を持つトランジションが最初に発火する。一般化確率ペトリネットは時間トランジションと即時発火トランジションという二つの型のトランジションを持つ。時間トランジションは指数分布発火率を持ち、単一サーバと無限サーバの2種類がある。即時発火トランジションは発火遅延がゼロで、主に論理的な制御や時間トランジションの遅延に比べ非常に小さな遅延をもつトランジションを表すために使われる。

時間連続ペトリネットとは、一般化確率ネットのモデルを流体化するための手法である [2]。流体化とは一般化確率ネットて扱っていた離散値（トークン、発火）を連続値に置き換えることである。時間連続ペトリネットでは、一般化確率ペトリネットのモデルからの直接的な変換を

可能にするために、発火遅延を表現するための**時間トランジション**と、流れの経路を指定する**経路トランジション**の2種類のトランジションをもつ。

3 モデルの詳細

3.1 指数分布乱数によるモデル（基準モデル）

即時発火トランジションと時間トランジション、それぞれを発火させる。まず、即時発火トランジションを発火させる。各 t_i の発火率を λ_i として、乱数関数 $rand()$ を用いて、次の式の w_i が最大である発火可能トランジション t_i を発火させる。

$$w_i = \lambda_i * rand() \quad (1)$$

次に、時間トランジションを発火させる。発火率 λ_i の時間トランジション t_i が発火するまでの遅延 Δt_i は次の式で計算される。

$$\Delta t_i = \log(rand()) / (\lambda_i * e_i) \quad (2)$$

ただし、

$$e_i = \begin{cases} 1 & \text{単一サーバ} \\ \min_{p \in \bullet t_i} \{m(p) / A(p, t_i)\} & \text{無限サーバ} \end{cases} \quad (3)$$

各時間トランジションの中で、 Δt が最小であるトランジションを発火させる。

3.2 差分方程式によるモデル

時間連続ペトリネットのマーキング $m(t)$ を離散時間化して、 $m_k = m(k\Delta\tau)$ とし、差分方程式

$$m_{k+1} \simeq m_k + C f_k \Delta\tau \quad (4)$$

で近似する。ここで、 C はペトリネットの接続行列である。 f_k は t_i に対応する要素 f_{k_i} が

$$f_{k_i} = \left(\min_{p \in \bullet t_i} \frac{m_k(p)}{A(p, t_i)} \right) * \lambda_i \quad (5)$$

で定義されるベクトルであり、 $A(p, t_i)$ はアーク (p, t_i) の重みである。

3.3 ホワイトノイズのモデル [5]

前節の式 (4) で与えられた方程式を考える。長さ $|T|$ のノイズ列ベクトル v_k を定義する。 v_k の第 i 要素は平0、分散 $f_{k_i} \Delta t$ の正規乱数である。 v_k を追加し、次の方程式が与えられる。

$$m_{k+1} = m_k + C f_k \Delta\tau + C v_k \quad (6)$$

3.4 アルゴリズムの拡張

論文 [5] は時間トランジションしか持たないペトリネットに対するものであったが、本研究では、即時発火トランジションと時間トランジションの両方を持つペトリネットを用いて、シミュレーションを行う。そのため論文 [5] を拡張したアルゴリズムを提案する。サンプリング時間 $\Delta\tau$ ごとに、時間トランジションの計算に即時発火トランジションに対する計算を追加する。 f_k の時間トランジションに対する要素を式 (5) 計算し、 $m'_{k+1} = m_k + Cf_k\Delta\tau + Cv_k$ を計算する。次に、 f_k の即時発火トランジションに対する要素を次の式で計算する。

$$f_{k_i} = \lambda_i \cdot \min_{p \in \bullet t_i} \{m(p)\} \quad (7)$$

そして、 $m_{k+1} = m'_{k+1} + Cf_k$ により次状態を得る。

4 シミュレーションの結果と考察

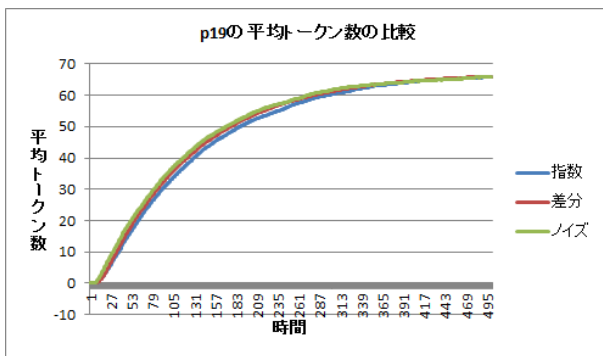


図1 p19における各モデルのトークン数の比較

本研究では、うどん店のペトリネットモデル [6] を用い、指数分布乱数によるモデルを基準モデルとして、差分方程式によるモデルとホワイトノイズのモデルをシミュレーションを行う。表 2 に示す 2 つのプレースについて二つのモデルによる平均トークン数の誤差を比較する。ただし、サンプリング間隔 $\Delta\tau = 1$ 秒とし、1000 回の試行の平均をとった。図 1 にプレース $p19$ の平均トークン数を示す。二つのモデルとも基準モデルに近い。差分方程式のモデルの平均誤差が 3.96% であり、ホワイトノイズのモデルの平均誤差が 9.04% である。つまり、差分方程式によるモデルのほうが誤差が少ないことが分かった。また、プレース $p19$ の入力トランジションと出力トランジションの両方とも無限サーバ時間トランジションであり、論文 [5] の条件を満たすので、誤差が小さいと考えられる。

表 1 各プレースの誤差

プレース名	差分の誤差 (%)	ノイズの誤差 (%)
p19	3.96	9.04
p13	49.5	14.9

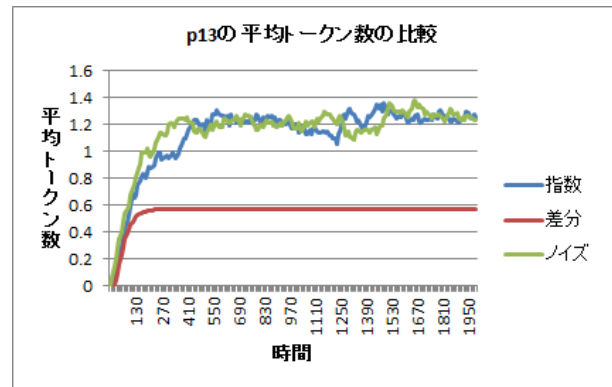


図2 p13における各モデルのトークン数の比較

表 2 各プレースの入出力トランジションの種類

プレース	意味	入力トランジション	出力トランジション
p19	食事中的客	無限サーバ時間	無限サーバ時間
p13	会計待の客	即時発火	単一時間

一方、プレース $p13$ では差分方程式のモデルの誤差がかなり大きい。その理由はプレース $p13$ の入力トランジションが即時発火トランジションであることと考えられる。ホワイトノイズのモデルでも、誤差が少し大きい。誤差は入出力トランジションの種類に影響されることが分かった。

5 おわりに

本研究では、一般化確率ペトリネットのモデルを流体化によるモデルの置き換え、差分方程式によるモデルとホワイトノイズモデルの二つのモデルを比較するために、シミュレーションを行った。結果として、ホワイトノイズモデルが差分方程式モデルより誤差が小さいと考えられる。しかし、プレースの入出力トランジションの種類によって誤差が異なることが分かった。ホワイトノイズのモデルの誤差がまだ大きいので、提案したアルゴリズムを改善していくことが今後の課題である。

参考文献

- [1] 山口、服部、田中、電子情報通信学会技術研究報告. CAS, 回路とシステム 101(458), pp.31-38, 2001.
- [2] 平石、電子情報通信学会技術研究報告. CST, コンカレント工学 108(78), pp.7-12, 2008.
- [3] 村田忠夫、「アルゴリズムシリーズ5 ペトリネットの解析と応用、近代科学社、1992.
- [4] M.A.Marsan et al. “Modelling with Generalized Stochastic Petri Nets”, Wiley, 1995.
- [5] C.R.Vazquez, and M.Silva, IEEE Trans. SMC-A, 42-3, pp.641-653, 2012.
- [6] N.V.Kien, A.Ohta, and K.Tsuji, Proc. ITC-CSCC2014, pp.978-981, 2014.