

ビームワンダリングが発生する量子通信路の通信路容量と誤り率の特性

情報科学科 王 天澄

指導教員：白田 毅

1 はじめに

量子通信において最も有望とされる通信媒体は光であり、現代の大容量通信を担う光ファイバ通信の発展形として、多くの量子通信の研究はなされてきた。しかし、量子通信の多様な応用のため、無線量子通信の研究の重要性が増している。その一歩として、フェージング現象を想定し、BPSK(Phase Shift Keying) コヒーレント状態信号の誤り率と M 元 PSK コヒーレント状態信号の通信路容量が明らかにされた [1][2]。さて、大気揺らぎ等による光のビームワンダリング(ふらつき)も、衛星-地上間の通信など応用先によっては、無線量子通信に対する主要な制約となり得る。本稿では、[3] で用いられたモデルを使い、ビームワンダリングが存在する場合の、BPSK を考慮した量子最適受信機と古典最適受信機の誤り率特性及び、多元デジタル変調を考慮した通信路容量を明らかにする。

2 ビームワンダリング存在時の通信路

量子状態 $\rho^{(\text{in})}$ を送信したとき量子状態 $\rho^{(\text{out})}$ が受信されるとする。[3] では、ビームワンダリングの効果を透過率が確率的である減衰とし、モデル化している。したがって、受信量子状態の表式は [1] に示されたものと同一である。送信量子状態がコヒーレント状態 $\rho^{(\text{in})} = |\alpha\rangle\langle\alpha|$ であるとき、受信量子状態 $\rho^{(\text{out})}$ は、以下の式で表される。

$$\rho^{(\text{out})} = \int_0^1 P(T) |\sqrt{T}\alpha\rangle\langle\sqrt{T}\alpha| dT \quad (1)$$

ここで、 T はエネルギー通過率で、 $P(T)$ は T の確率分布である。[3] では、光ビームが、受信機の受光面において、平均 d 、分散 σ^2 のガウス分布に従ってふらつくモデルが扱われ、受信機における開口部の半径を a 、ビームスポットの半径を W として、

$$T > T_0 := \sqrt{1 - e^{-\frac{a^2}{W^2}}} \quad (2)$$

のときは $P(T) = 0$ 、 $0 \leq T \leq T_0$ のときは、

$$P(T) = \frac{2R^2}{\sigma^2 \lambda T} \left(2 \ln \frac{T_0}{T} \right)^{\frac{\lambda}{2}-1} I_0 \left(\frac{Rd}{\sigma^2} \left[2 \ln \frac{T_0}{T} \right]^{\frac{\lambda}{2}} \right) \times e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \left\{ R^2 \left(2 \ln \frac{T_0}{T} \right)^{\frac{\lambda}{2}} + d^2 \right\}} \quad (3)$$

となる。ここで、 T_0 は最大透過率と呼ばれる。また、 $I_0(\cdot)$ と $I_1(\cdot)$ は変形ベッセル関数であり、 R と λ は、[3] に示されている通り、 a と W により定まる量である。

3 各受信機の誤り率特性及び通信路容量

BPSK 信号の送信量子状態 $\rho_0 = |\alpha\rangle\langle\alpha|$ 、 $\rho_1 = |-\alpha\rangle\langle-\alpha|$ を送信し、前節のモデルにより受信量子状態 $\rho_0^{(\text{out})}$ と $\rho_1^{(\text{out})}$ を求め、古典最適受信機であるホモダイン受信機と量子最適測定誤り率を計算する。ホモダイン測定誤り率 P_e^{Hom} と量子最適測定誤り率 P_e^{Opt} はそれぞれ以下の式となる。

$$P_e^{\text{Hom}} = \frac{1}{2} \int_0^{T_0} P(T) \text{erfc}(\sqrt{2T}\alpha) dT \quad (4)$$

$$P_e^{\text{Opt}} = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \text{Tr} \left| \rho_0^{(\text{out})} - \rho_1^{(\text{out})} \right| \right\} \quad (5)$$

ただし、 $|\alpha| = \sqrt{A^\dagger A}$ であり、 $\text{erfc}(\cdot)$ は相補誤差関数である。図 1 はビームワンダリングがある場合のホモダイン受信機と量子最適受信機の誤り率特性の一例である。図より、平均光子数

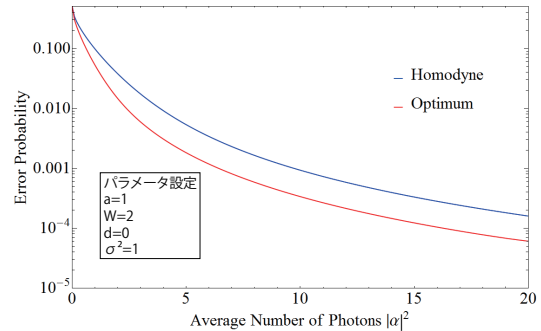


図 1 BPSK における量子最適受信機と古典最適受信機の誤り率特性

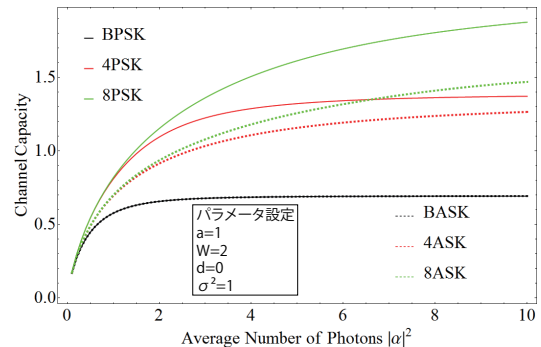


図 2 多元デジタル変調における通信路容量

が大きくなり、光がほぼ古典的な場合でも、ホモダイン受信機と量子最適受信機との特性には明確な差があることがわかる。

また、 M 元 PSK と ASK コヒーレント状態信号による通信を行うとき、送信状態 $\rho_i^{(\text{in})}$ ($i = 0, 1, \dots, M-1$) はそれぞれ、

$$\rho_i^{(\text{in})} = |\alpha e^{j\frac{2i\pi}{M}}\rangle\langle\alpha e^{j\frac{2i\pi}{M}}| \quad (6)$$

$$\rho_i^{(\text{in})} = |(2i - M + 1)\alpha\rangle\langle(2i - M + 1)\alpha| \quad (7)$$

となる。 j は虚数単位である。通信路容量 C は、以下のような von Neumann エントロピー $S(\cdot)$ を使った式により計算できる。

$$C = \max_{\xi_i} \left[S \left(\sum_i \xi_i \rho_i^{(\text{out})} \right) - \sum_i \xi_i S(\rho_i^{(\text{out})}) \right] \quad (8)$$

ただし、 ξ_i は先験確率である。図 2 はビームワンダリングがある場合の MPSK と MASK を用いた通信路容量の一例である。それぞれ平均光子数が小さいところで通信路容量の差が見られるため、平均光子数が小さい場合でも、8ASK や 8PSK を用いる意味があることがわかる。

4 終わりに

ビームワンダリングを考慮した図 1 と図 2 により量子最適受信機の優位性を確認し、さらに平均光子数が小さい場合でも、より多い元数をもつデジタル変調方式を用いる意味があることがわかる。

参考文献

- [1] 喜多, 小山, 田中, 白田, 平成 27 年度電気・電子・情報関係学会東海支部連合大会, K1-7, (2015).
- [2] 小山, 白田, SITA2015, pp.373-377, (2015).
- [3] D.Y.Vasylyev *et al.*, Phys. Rev. Lett. **108**, 220501, (2012).

公表論文

1. 王, 喜多, 白田, 平成 28 年度電気・電子・情報関係学会東海支部連合大会, B3-3, (2016).