

## 量子最適受信機の誤り率近似式に対する規格化近似精度の特性

情報科学科 松本直也

指導教員：白田 毅

## 1 はじめに

量子情報理論において、最も低い平均誤り率を達成する受信機を量子最適受信機と呼び、そのときの誤り率を最小誤り率と呼ぶ。最小誤り率の計算は、量子通信における限界性能の調査や量子暗号の安全性評価などを行う上で必要となる。しかし、多元量子状態信号における最小誤り率の計算は、計算量などの点から一般的には困難であるとされる。そのため、計算が容易であるような近似式や上下界を考えることが重要となっている。

文献 [1] にて、トレース距離を用いた最小誤り率の近似式が提案されている。この近似式は、計算が容易であり、近似値の小さなところで良い近似となるという特徴が示されているが、その精度が数値計算でしか明らかにされていない。本研究では、この近似式に着目し、理論的な精度の保証を与えることを目的とした調査を行う。具体的には、近似式の精度と近似値の関係に着目し、その比の収束先と収束の挙動について調査を行い、近似式の特徴を捉える。

## 2 最小誤り率の近似式

本研究で扱う文献 [1] で提案されている近似式についての説明を行う。  $M$  元量子状態信号  $\{\rho_k | k = 0, \dots, M-1\}$  において、  $D(\rho_j, \rho_l) \leq D(\rho_{j'}, \rho_{l'}), \forall j', l' (j' \neq l')$  を満たす 2 量子状態信号  $\{\rho_j, \rho_l\}$  を近接 2 信号と呼ぶ。ここで、  $D(\cdot, \cdot)$  はトレース距離を表す。近接 2 信号のトレース距離を  $D_{\min}$  とする。  $D_{\min}$  を用いて、この 2 信号の最小誤り率は  $P_e^{\text{binary}} = 1/2(1 - D_{\min})$  で与えられる。量子状態信号  $\rho_k$  について、  $D(\rho_k, \rho_i) = D_{\min}$  となる  $\rho_i$  を  $\rho_k$  の近接信号と呼び、この近接信号の平均数を  $\langle N \rangle$  と表す。文献 [1] で提案された近似式  $P_e^{\text{approx}}$  は、  $P_e^{\text{binary}}$  と  $\langle N \rangle$  を用いて式 (1) のように提案されており、近似値の小さなところで、  $M$  元量子状態信号の最小誤り率  $P_e^{\text{opt}}$  の良い近似となることが数値的に示されている。

$$P_e^{\text{approx}} = \langle N \rangle P_e^{\text{binary}} \quad (1)$$

## 3 規格化近似精度

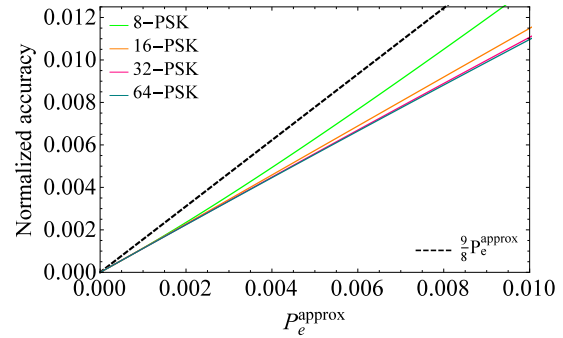
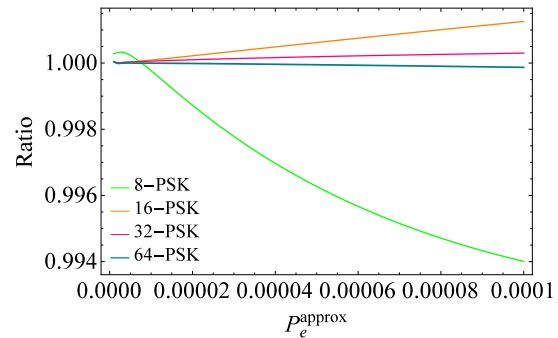
文献 [1] では、  $P_e^{\text{approx}}$  がどの程度良いのかを定量的に示すための指標として、規格化近似精度

$$NA = |1 - P_e^{\text{approx}}/P_e^{\text{opt}}| \quad (2)$$

を用いている。この近似精度は、値が低いほど近似式が高精度であることを表す。本研究では、この規格化近似精度に注目し、近似値との関係について調査する。

## 4 結果

本研究では、  $M$  元 ASK (Amplitude Shift Keying) コヒーレント状態信号と  $M$  元 PSK (Phase Shift Keying) コヒーレント状態信号を対象として調査を行う。ここで、先験確率は等確率とする。図 1 に、PSK 信号の元数  $M$  ごとの近似値と規格化近似精度との関係を示す。図 2 に、元数  $M$  ごとの PSK 信号での収束の挙動を示す。ここで、縦軸 Ratio は、  $NA/P_e^{\text{approx}}$  と  $9/8$  の

図 1 PSK コヒーレント状態信号における  $P_e^{\text{approx}}$  と NA の関係。図 2 PSK コヒーレント状態信号における  $9/8$  への収束の挙動。

比を表す。図 1 より、PSK 信号では、近似値の小さなところで、近似値と規格化近似精度の比が  $9/8$  に収束していくような挙動が確認できる。グラフは省略するが、ASK 信号の場合は、元数が増加するにしたがって  $9/8$  に近づくような値に収束するような挙動が確認できた。図 2 より、PSK 信号では、振動しながら  $9/8$  へ収束するような挙動が確認できる。ASK 信号では、一定の傾きで下から収束するような挙動を確認することができた。

## 5 まとめ

本研究では、トレース距離を用いた最小誤り率の近似式について、近似値と規格化近似精度の比の収束先と、収束の挙動について数値的な結果を示した。今回の結果から、誤り率の小さなところでは、  $NA \approx (9/8)P_e^{\text{approx}}$  となることが予想された。今後の目標としては、今回示したような数値結果について理論的な証明を行い、この近似式に理論的な精度保証を与えることが挙げられる。

## 参考文献

- [1] S. Asano, K. Nakahira, and T.S. Usuda, Proc. of AQIS2014, pp.171-172, (2014).

## 公表論文

1. 松本直也, 西境浩平, 角谷昭仁, 白田毅, 第 39 回情報理論とその応用シンポジウム, pp.348-353, (2016).
2. 松本直也, 西境浩平, 角谷昭仁, 白田毅, 平成 28 年度電気・電子・情報関係学会東海支部連合大会, B3-1, (2016).