量子一括及び個別測定と古典軟判定及び硬判定復号の関係の考察

情報科学科　江場あゆみ　　　指導教員：臼田 毅

1　はじめに

2000 年，相馬らは任意の変調を許した量子通信路容量を予想し，平均光子数が小さいときに，2 値変調により量子通信路容量が漸近的に達成されることを示した [1]．その後，文献 [2] では減衰通信路の量子通信路容量の証明がなされ，エネルギー（あるいは平均光子数）制約条件下で，連続的（アナログ）変調を含む任意の変調を許した場合の通信路容量が表されている．また，多値ディジタル変調により，同程度の量子通信路容量の達成度がより大きな平均光子数で得られることが示されており [3]，ディジタル変調による通信路容量の達成が量子特有であり，古典にはないものであるということが文献 [1] で述べられている．しかし，ひと言で量子と古典と言っても，ワンショットの量子最適受信機と古典最適受信機の違い，量子一括測定と個別量子測定の違いなど，様々な意味があり，主張を整理しておく必要がある．

本稿では，ディジタル変調による通信路容量達成の様子を文献 [1, 3] より詳しく調べ，ヘテロダイン受信機と軟判定復号，そして硬判定復号を用いた古典論の結果と比較を行うことで，古典論と量子論が定性的に等しく，文献 [1] の主張では，個別量子測定による通信路容量を古典論と称していたことを再確認する．

2　任意の変調を許す場合の通信路容量

エネルギー透過率 η の減衰通信路を考え，送信平均光子数を N_{S} に制約する．また，送信量子状態は共にコヒーレント状態を想定する．

(1) 量子通信路容量

量子通信路容量は，次式で与えられる [2]．

$$C_{\mathrm{Q}}^{(\mathrm{Full})} = g(\eta N_{\mathrm{S}}),\ g(x) = (x+1)\log_2(x+1) - x\log_2 x \quad (1)$$

この通信路容量は，ガウス分布に基づく連続的な変調を施すことで達成される．

(2) 古典通信路容量

受信機を古典最適であるヘテロダイン受信機とする．このとき，対応する古典通信路容量は，以下のようになる．

$$C_{\mathrm{C}}^{(\mathrm{Full1d})} = \frac{1}{2}\log_2(1+2\eta N_{\mathrm{S}}),\ C_{\mathrm{C}}^{(\mathrm{Full2d})} = \log_2(1+\eta N_{\mathrm{S}}) \quad (2)$$

左（右）の式は信号が 1 次元（2 次元）である場合の限界を示す．

3　ディジタル変調に対する通信路容量

本稿では，文献 [1, 3] にならい，ディジタル変調として PSK (Phase-Shift Keying) 変調を考える．M 相 PSK 変調では，送信量子状態であるコヒーレント状態は $|\alpha_k\rangle = |\alpha e^{2\pi k\mathbf{i}/M}\rangle$, $(k = 0, 1, \ldots, M-1)$ となる．ただし，$\mathbf{i} = \sqrt{-1}$ は虚数単位である．

(1) 量子通信路容量

M 相 PSK 信号は対称な純粋状態信号なので，量子通信路容量は等確率 von Neumann エントロピーとなる [4]：

$$C_{\mathrm{Q}}^{(M)} = S(\rho) = -\mathrm{Tr}\rho\log_2\rho, \quad \rho = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}|\alpha_k\rangle\langle\alpha_k| \quad (3)$$

この通信路容量は，量子一括復号を用いた場合に，符号長無限の極限で漸近的に達成される．

(2) 古典通信路容量

ここでも，受信機をヘテロダイン受信機とする．古典通信路容量も，信号の対称性から信号生起確率等確率で達成される．

$$C_{\mathrm{C}}^{(M)} = H(Y) - H(Y|X) \quad (4)$$

ただし，$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2) \in Y$ をヘテロダイン受信機の出力とし，

$$H(Y) = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p(\boldsymbol{y})\log_2 p(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y} \quad (5)$$

$$H(Y|X) = -\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p(\boldsymbol{y}|\alpha_k)\log_2 p(\boldsymbol{y}|\alpha_k)d\boldsymbol{y}\right) \quad (6)$$

また，$p(\boldsymbol{y}|\alpha_k$ は，$|\alpha_k\rangle$ が送信されたときのヘテロダイン受信機の出力分布，$p(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} p(\boldsymbol{y}|\alpha_k)$ である．この通信路容量は，軟判定復号を用いた場合に漸近的に達成される．

4　通信路容量の達成度

量子通信路容量の達成度として式 (3) を式 (1) で割った比を計算する．古典の場合は，式 (4) を式 (2) で割った比を計算する．

表 1　通信路容量達成時の受信平均光子数比較

	達成度	90%	95%	99%
BPSK	量子	0.107152	0.051286	0.01
	古典	1.07152	0.676083	0.295121
QPSK	量子	0.870964	0.562341	0.186209
	古典	2.13796	1.38038	0.645654

表 1 は，PSK 変調に対し $M = 2$(BPSK 変調) と $M = 4$(QPSK 変調) の場合について，上記の比が，90%, 95%, 99% となるときの受信平均光子数 ηN_{S} を示した表である．結果，量子だけでなく，古典論においても，99% 以上の達成度をいずれのディジタル変調でも示していることが分かった．

5　おわりに

任意の変調を許す場合の量子と古典の通信路容量は，量子の場合は一括測定を許すときに，また古典の場合は軟判定復号を許すときにいずれもディジタル変調 (あるいは有限の信号数) により漸近的に達成されることを確認した．また，文献 [1] は個別量子測定による通信路容量を古典論と称していたため，古典ではディジタル変調による通信路容量達成が行われないと述べられていたことが分かった．

参考文献

[1] M. Sohma and O. Hirota, Phys. Rev. **A62**, 052312, (1999).
[2] V. Giovannetti *et al.*, Phys. Rev. Lett. **90**, 027902, (2004).
[3] Y. Ishida, K. Kato, and T.S. Usuda, Proc. QCMC2006, pp.323-326, (2006).
[4] K. Kato *et al.*, Phys. Lett. **A251**, pp.157-163, (1999).

公表論文

1. 江場あゆみ, 王天澄, 喜多健志朗, 臼田毅, 平成 29 年度電気・電子・情報関係学会東海支部連合大会, E3-1,(2017).