非対称量子信号の対称化手法の提案

情報科学科　中澤 彩希　　　指導教員：臼田 毅

1　はじめに

量子情報理論において，対称性を持つ信号として群共変的信号が数学的に定義されている [1, 2]．群共変的信号は，量子最適測定の解析解などの量子情報理論に関する研究において注目されており，量子通信の性能評価を行う際に非常に有用である．一方，非対称である量子状態信号 (ASK 信号や QAM 信号など) も存在する．現状，これらの信号は規模が大きくなると，計算量が膨大となり性能評価が困難である．量子通信の性能評価を容易に行うためには，非対称量子信号を対称化する必要がある．

そこで，先行研究 [3] では，元々が非対称でも符号化した結果が対称になればよいというアイデアを元に，符号化による非対称量子信号の対称化に初めて成功した．しかし，他の非対称量子信号の対称化に関しては明らかでなかった．本稿では，先行研究のアイデアを発展させ，非対称量子信号に適用可能な対称化手法を提案し，その適用例を示す．

2　群共変的量子信号

量子信号は「群共変的」という形で，その対称性が定義される．以下に，文献 [2] に示されている純粋量子状態信号に対する群共変的信号の定義を示す．

定義 1:　$(G;\circ)$ を演算 $\circ$ をもつ有限群とする．量子信号系 $\{|\psi_i\rangle|\ i \in G\}$ は，

$$\forall i,k \in G,\ U_k|\psi_i\rangle = |\psi_{k\circ i}\rangle \tag{1}$$

となるユニタリ作用素 U_k が存在するとき，群 $(G;\circ)$ に関して群共変的であるという．

3　提案手法の手順

ここでは，非対称量子信号から群共変的である部分集合を多数取り出し，直積群を構成する対称化手法を提案していく．

1. 非対称な量子信号系 (量子状態集合) $\mathcal{S} = \{|\psi_i\rangle \mid i \in S\}$ に対し，群共変的である部分集合 $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \ldots, \mathcal{G}_l \subset \mathcal{S}$ を選ぶ．ただし，各 $\mathcal{G}_l$ は要素数を 2 以上とする．
2. 各 $\mathcal{G}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, l)$ に対応する群を $G_k \subset S$ とする．すなわち，$\mathcal{G}_k$ は群 G_k に関して群共変的である．
3. 各 G_k から 2 つ以上選択し，それらを組み合わせて，以下のように直積群 C_{sym} を構成することで符号化を行う．ただし，$k_t \in \{1, 2, \ldots, l\}$ とする．
$$C_{\mathrm{sym}} = G_{k_1} \times G_{k_2} \times \cdots \times G_{k_m} \tag{2}$$
m は 2 以上の任意の整数に設定することができ，各 G_{k_t} は任意に選択・重複が可能である．ただし，$|\mathcal{S}|$ 元信号として取り扱っているため，$\mathcal{S}$ のすべての量子状態を使うのが望ましい．
4. 直積群 C_{sym} の要素を $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_m) \in C_{\mathrm{sym}}$ として，C_{sym} に対応する量子状態集合 $\mathcal{C}_{\mathrm{sym}}$ を以下のようにする．ただし，$w_t \in G_{k_t}$，$|w_t\rangle \in \mathcal{G}_{k_t}$ $(t = 1, 2, \ldots, m)$ とする．
$$\mathcal{C}_{\mathrm{sym}} = \Big\{|\boldsymbol{w}\rangle = |w_1\rangle \otimes |w_2\rangle \otimes \cdots \otimes |w_m\rangle \ \Big|\ \boldsymbol{w} \in C_{\mathrm{sym}}\Big\} \tag{3}$$
5. 先行研究 [3] と同様にして，群 C_{sym} 上の群符号を用いて，さらに符号化を行う．

4　対称化可能性の証明

まず，手順 1 に関して，任意の 2 元信号が群共変的である [2] ことから，以下のことが言える．

Remark 2:　非対称量子信号 $\mathcal{S}$ に対し，群共変的な部分集合を少なくとも 3 つ以上選ぶことが可能である．

また，手順 3,4 に関して，群共変的信号の必要十分条件 [2] から，以下のことが言える．

Remark 3:　C_{sym} は S 上の符号であり，$\mathcal{C}_{\mathrm{sym}}$ は群 C_{sym} に関して群共変的である．

以上より，群共変的である部分集合が必ず存在し，任意の非対称純粋状態信号 $\mathcal{S}$ から，符号化によって対称量子信号 $\mathcal{C}_{\mathrm{sym}}$ を必ず得ることができる．

5　提案手法の適用例

例えば, $\mathcal{S} = \{|\psi_i\rangle \mid i \in S\} (S = \{0, 1, 2\})$ を任意の 3 元量子信号とする．S の部分集合 $G_1 = \{0, 1\}, G_2 = \{0, 2\}, G_3 = \{1, 2\}$ において，各 G_k の 1 番目と 2 番目の要素をそれぞれ a, b とし，$a \circ a = b \circ b = a, a \circ b = b \circ a = b$ のように G_k 上の演算を定義することで，G_k を群とする．このとき，C_{sym} の例として，

$$C_{\mathrm{sym}} = G_2 \times G_1 = \{00, 01, 20, 21\} \tag{4}$$

を考えることができ，これは先行研究 [3] に示された対称化と一致する．この他に，$G_2 \times G_3$ などの 2 次拡大や $G_1 \times G_2 \times G_3$ などの 3 次拡大以上も考えることができる．

6　まとめ

非対称量子信号から群共変的である部分集合を多数取り出し，直積群を構成する「符号化による対称化手法」を提案した．また，提案手法により任意の非対称純粋状態信号に対して対称化が必ず可能であることを示した．今後の課題として，任意の非対称混合状態信号に対する対称化手法の考案が挙げられる．

参考文献

[1] E.B. Davies, IEEE Trans. Inf. Th. **IT-24**, pp.596-599, (1978).

[2] T.S. Usuda and I. Takumi, QCMC2, Plenum Press, pp.37-42, (2000).

[3] 田中美波, 大橋あすか, 臼田 毅, SITA2016, pp.354-359, (2016).

公表論文

1. **中澤 彩希**，田中 美波，臼田 毅，平成 29 年度電気・電子・情報関係学会東海支部連合大会, E3-5, (2017).
2. **中澤 彩希**，田中 美波，高比良 宗一，臼田 毅，第 40 回情報理論とその応用シンポジウム (SITA2017), pp.408-413, (2017).