

振幅及び位相変動に基づいた量子フェージング通信路の特性

王 天澄 指導教員：白田 毅

1 はじめに

近年では通信技術の発展により極めて高い周波数の電磁波が効率的に利用され、省エネで高速・大容量通信を実現した光通信システムが成り立っている。しかし、光の本質である量子性により、光のように周波数が高いほど量子雑音がより顕著に現れる。光の潜在能力を最大限に利用するために、量子雑音に対処する量子通信を考慮する必要がある。それに加え、様々な応用に向けて、多様な無線通信環境を考える量子フェージング通信路に関する研究が不可欠である。

これまでに、無線量子通信を想定した場合において、量子フェージング通信路のデジタル変調方式における性能解析を行うために、量子状態の時空発展を記述するシュレーディンガー表示による、確率減衰に基づいた量子フェージング通信路のモデルが示されていた [1].

本研究では、無線量子通信の様々な応用先に向け、より多様で現実的な通信環境を考慮し、無線通信路における不完全要因となる、振幅変動、位相変動と、振幅変動及び位相変動の重畳に着目し、いくつか通信路特性を解明するのが目的となる。まず、衛星-地上間の量子通信など応用先によって主要な制約となり得るビームワンダリング (振幅変動の一種) に注目し、デジタル信号を用いた場合の通信路容量特性を明らかにした [2]. 次いで、熱雑音などの振幅変動に比べ研究が不足している位相雑音に注目し、それが単独で生じる量子通信路において、 M 元 PSK (M -ary Phase-shift Keying) 信号に対し量子測定による誤り率特性及びロバスト性を明らかにする。最後に、同様に研究が不足している雑音が複数重なる通信路に注目し、熱雑音と位相雑音が発生する量子通信路を考え、量子最適測定による誤り率特性を明らかにする上に、誤り率を求める近似式を構成する。本要旨ではそのうちの後二者について説明を行う。

2 位相雑音に関する研究

2.1 位相雑音が発生する量子通信路

コヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ に MPSK デジタル変調を施し、送信コヒーレント状態信号の密度作用素 (以下「密度作用素」を省略する) $\rho_i^{(\text{in})}$ ($i = 0, 1, \dots, M-1$) は

$$\rho_i^{(\text{in})} = \left| \alpha e^{j\frac{2i\pi}{M}} \right\rangle \left\langle \alpha e^{j\frac{2i\pi}{M}} \right| \quad (1)$$

となる。ただし、 $j = \sqrt{-1}$ であり、平均光子数 $N_s = |\alpha|^2$ である。

等先験確率の送信コヒーレント状態信号は位相雑音が発生する量子通信路を通し、以下のように受信混合状態信号 $\rho_i^{(\text{out})}$ として受信される。

$$\rho_i^{(\text{out})} = \int P(\theta) \left| \alpha e^{j(\frac{2i\pi}{M} + \theta)} \right\rangle \left\langle \alpha e^{j(\frac{2i\pi}{M} + \theta)} \right| d\theta \quad (2)$$

ただし、位相雑音の確率分布 $P(\theta)$ が平均 0 で分散 σ^2 (いわゆる、位相雑音量) の正規分布に従うと想定する。 $\rho_i^{(\text{out})}$ に対し、それぞれ量子最適測定と古典最適測定を行う。

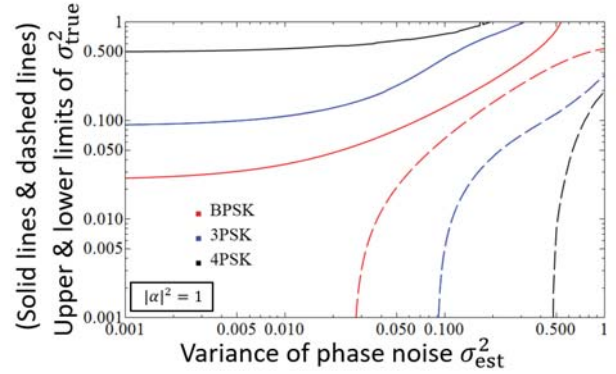


図1 Limits of σ_{true}^2 when $S < 0.01$

2.2 量子最適測定

量子状態 $\rho_i^{(\text{out})}$ 及びそれに対応する等先験確率 $\xi_i = \frac{1}{M}$ で構成されるアンサンブル \mathcal{E}_M を仮定する。信号測定過程を記述する POVM (positive-operator valued measure) $\{\Pi_i\}$ を用いて、古典情報 $\{i\}$ に対応する量子状態 $\{\rho_i^{(\text{out})}\}$ を測定する。ただし、

$$\sum_i \Pi_i = \mathbb{I}, \quad \Pi_i \geq 0 \quad (3)$$

となり、 \mathbb{I} は恒等作用素である。そこで、 $\Pi_j \in \{\Pi_i\}$ で $\rho_k^{(\text{out})} \in \{\rho_i^{(\text{out})}\}$ とすると、古典情報 j が決定される条件付き確率 $p(j|k) = \text{Tr} \rho_k^{(\text{out})} \Pi_j$ が得られる。

一方、量子最適測定は、最適な測定過程 POVM を用いて最小誤り率 (ヘルストローム限界) を達成できる量子受信機である。 $\{\rho_i^{(\text{out})}\}$ に対し、ヘルストロームのアルゴリズム [3] を用いて最適決定作用素 $\{\Pi_i'\}$ を得ることが可能である。この POVM が \mathcal{E}_M を識別する誤り率は以下のように計算できると知られている。

$$P_e^{\text{OptQ}} = 1 - \sum_i \text{Tr} \xi_i \rho_i^{(\text{out})} \Pi_i' \quad (4)$$

2.3 古典最適測定

ホモダイン測定とヘテロダイン測定はそれぞれ、BPSK ($M = 2$) と MPSK ($M > 2$) を施した受信光信号に対し、最小の誤り率を達成できる古典受信機である。それぞれ以下の式を用いて最小誤り率 $P_e^{\text{OptC}} (\ni P_e^{\text{Hom}}, P_e^{\text{Het}})$ を計算することが可能である。

$$P_e^{\text{Hom}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^0 \int P(\theta) e^{-2(x - |\alpha| \cos \theta)^2} d\theta dx \quad (5)$$

$$P_e^{\text{Het}} = \frac{1}{\pi} \int \int_{\frac{\pi}{M}}^{\frac{\pi(2M-1)}{M}} \int_0^{\infty} P(\theta) r e^{-r^2 - |\alpha|^2 + 2r|\alpha| \cos(\phi - \theta)} dr d\phi d\theta \quad (6)$$

2.4 量子受信機の誤り率特性及びロバスト性

受信機での揺らぎなどにより、量子受信機が位相雑音量 σ_{true}^2 を誤って見積もる場合がある。誤った位相雑音量 σ_{est}^2 に基づいた量子測定を用い、誤り率 P_e は

$$P_e = 1 - \sum_i \text{Tr} \xi_i \rho_i^{(\text{out})} \Pi_i'' \quad (7)$$

となる。ただし、 $\{\Pi_i'\}$ は σ_{est}^2 に基づいた受信混合状態信号に対し最適な決定作用素である。一方、本研究では古典最適受信機は位相雑音量を見積もる必要がない。この場合、量子受信機の性能が古典最適受信機に劣る可能性がある。ここで、古典最適受信機の性能に対して、量子受信機が誤って σ_{est}^2 を見積もっても、ある程度の優位性が維持されるというロバスト性を考える。ロバスト性を定量的に評価する量 $S[4]$ を導入し、MPSK 信号 (例として $M \leq 4$) を受信する場合、 σ_{est}^2 に対して σ_{true}^2 の許容範囲をグラフ 1 に示す。

$$S = \frac{P_e - P_e^{\text{OptQ}}}{P_e^{\text{OptC}} - P_e^{\text{OptQ}}} \quad (8)$$

3 複数雑音の重畳に関する研究

3.1 熱雑音と位相雑音が発生する量子通信路

コヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ に BPSK デジタル変調 ($M = 2$) を施し、送信コヒーレント状態信号 $\rho_n^{(\text{in})}$ ($n = 0, 1$) は式 (1) を用いて表すことが可能である。また、本研究においては、 $|\alpha|^2 = 1$ を設定している。

等先験確率の送信コヒーレント状態信号は熱雑音と位相雑音が発生する量子通信路を通し、以下のように受信混合状態信号 $\rho_n^{(\text{out})}$ として受信される。

$$\rho_n^{(\text{out})} = \int \int \int P(\theta) P_n(\beta) |\beta e^{j\theta}\rangle \langle \beta e^{j\theta}| d^2\beta d\theta \quad (9)$$

ただし、 $|\beta\rangle$ は純粋状態であり、 β_r と β_i を実数とすると $\beta = \beta_r + j\beta_i$ となる。また、 $P(\theta)$ は式 (2) でのと同様に位相変動の確率分布を表し、熱雑音の確率分布 $P_n(\beta)$ は以下のように書ける。

$$P_n(\beta) = \frac{1}{2\pi N_t} e^{-\frac{(\beta_r - (-1)^n \alpha)^2 + \beta_i^2}{2N_t}} \quad (10)$$

ただし、 N_t は熱雑音の平均光子数 (いわゆる、熱雑音量) である。 $\rho_n^{(\text{out})}$ に対し、それぞれ量子最適測定と古典最適測定を行う。

3.2 量子最適測定

BPSK 受信量子状態信号に対し、最小誤り率を以下のように簡単に計算することが可能である [5]。

$$P_e^{\text{Q}} = \frac{1}{2} \left(1 - \sum_{\lambda_m > 0} \lambda_m \right) \quad (11)$$

ただし、 λ_m は $(\rho_0^{(\text{out})} - \rho_1^{(\text{out})})$ の固有値である。

3.3 古典最適測定

BPSK 受信光信号に対しホモダイン測定を行い、以下のように最小誤り率を計算することが可能である。

$$P_e^{\text{C}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^0 \int \int P(\theta) P_0(\beta) \times e^{-2(x - |\beta| \cos(\arg(\beta) + \theta))^2} d\theta d^2\beta dx \quad (12)$$

3.4 量子最適測定の誤り率特性及び近似式

式 (11) を用いて量子最適測定による誤り率の等高線をグラフ 2 に示す。ここで、量 Q を定義し両雑音が互いに影響されるかを考察する。

$$Q_p(N_t; \sigma^2) = P_e^{\text{Q}}(N_t; \sigma^2) - P_e^{\text{Q}}(N_t; 0) \quad (13)$$

$$Q_t(\sigma^2; N_t) = P_e^{\text{Q}}(\sigma^2; N_t) - P_e^{\text{Q}}(\sigma^2; 0) \quad (14)$$

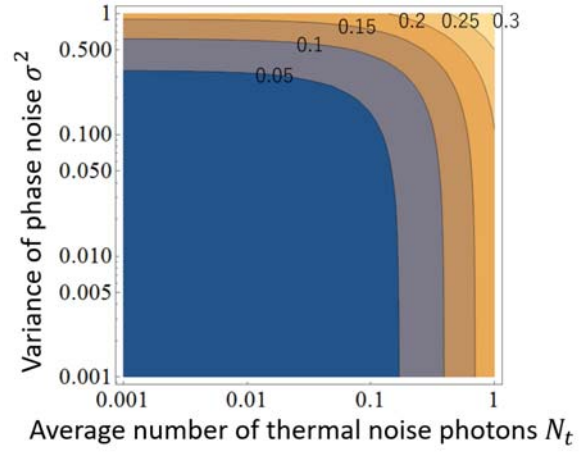


図 2 P_e^{Q} vs. N_t and σ^2

数値実験の結果により、両雑音が互いにほぼ影響しないため、 $Q_p(N_t; \sigma^2) \approx g(\sigma^2)$ と $Q_t(\sigma^2; N_t) \approx f(N_t)$ のように、量 Q を σ^2 と N_t に依存する関数に置き換えることが可能である。量子最適測定による誤り率の近似式は以下のように構成できる。

$$P_{\text{approx}} = P_e^{\text{Q}}(0; 0) + g(\sigma^2) + f(N_t) \quad (15)$$

ただし、 $P_e^{\text{Q}}(0; 0)$ は古典雑音無き誤り率である。特に $P_e^{\text{Q}} < 0.2$ に対して近似式による誤差は 0.003 以内に抑えられる。最後に、古典最適測定を用いた場合にも同様な手法を施し、両雑音が互いに影響する挙動があることに比べた結果、古典最適測定と量子最適測定を用いた場合は同様に近似式を構成できるが、前者に比べて後者の適用範囲が広いと推測する。

4 まとめ

本研究要旨では、量子通信路に位相雑音が生じる場合、MPSK 変調が施された信号に対し、量子測定と古典最適測定との性能差を定量的に評価するプロセスを提案し、量子測定によるロバスト性を明らかにした。また、熱雑音と位相雑音が重畳した場合を考え、量子最適測定による誤り率特性を示し、雑音間の影響可否に基づき誤り率を求める近似式を構成した。さらに古典最適受信機の場合に比べることにより、近似式を構成する手法の適用範囲を考察した。今後の課題としては、 $|\alpha|^2 \neq 1$ 及び他雑音の場合について、近似式の適用範囲を明らかにする上で、高精度の近似式を構築することが挙げられる。

参考文献

- [1] 喜多ら, 平成 27 年度電気・電子・情報関係学会東海支部連合大会講演論文集, K1-7, (2015).
- [2] T. Wang, et al., Proc. of AQIS2017, pp.215-217, (2017).
- [3] C. W. Helstrom, IEEE Trans. Inform. Theory 28, pp.359-366, (1982).
- [4] S. Koyama & T. S. Usuda, Proc. of ISITA2014, pp.259-263, (2014).
- [5] C. W. Helstrom, et al., Phys. Rev. A59, pp.1820-1828, (1999).

公表論文

- 1). T. Wang, K. Nakahira, and T. S. Usuda, Extd. Abst. of AQIS2018, 108, (2018).
- 2). T. Wang, K. Nakahira, and T. S. Usuda, Proc. of ISITA2018, pp. 344-348, (2018).
他 5 件 (筆頭著者), 7 件 (第二以降著者)