トレース距離を用いた量子最適受信機の誤り率近似式の精度に関する研究

松本 直也　　　指導教員：臼田 毅

1 はじめに

量子測定の中で最も誤り率が小さくなる測定のことを量子最適測定と呼び，その量子最適測定による誤り率の平均のことを最小誤り率と呼ぶ．最小誤り率を計算することは，量子通信における限界性能の調査や量子暗号の安全評価を行う上で重要である．しかし，最小誤り率の計算は解析解が明らかでない場合や，仮に解析解が明らかになっている場合でも，信号数が多い場合の計算量の問題などから困難であることが多いとされている．そのため計算が簡単な近似式について考えることが重要となってくる．そこで，私たちの研究グループではトレース距離と呼ばれる 2 つの量子状態の近さを測る指標を用いた最小誤り率の近似式を提案した [1, 2]．この近似式はいくつかの量子状態において，誤り率が小さい場合に精度がよいことが数値的に示されている．先行研究ではこの近似式について，その近似精度と近似値との比が，誤り率が小さくなるにしたがって特定の値へ収束していくことを数値的に明らかにしていた．

本研究ではこの近似式をより実用的なものにすることを目標として，理論的な精度の保証に必要となる特性を大きくわけて 2 つ明らかにした．本要旨ではそのうちの一つである「 PSK(Phase-shift-keying) コヒーレント状態信号での特定の値へ収束する原因の理論的証明 」についての説明を行う．

2 最小誤り率の近似式

本章では，調査の対象としている文献 [1, 2] で提案されている近似式について，構成方法の説明を行う．以下の説明では，M 元量子状態信号の先験確率を等確率と仮定している．

2.1 近接 2 信号

M 元量子状態信号 $\left\{\rho_k \,\middle|\, k=0,\ldots,M-1\right\}$ について，以下の条件を満たす量子状態信号 ρ_j,ρ_l を，近接 2 信号と呼ぶ．ここで D は 2 信号間のトレース距離を表す．

$$D(\rho_j,\rho_l) \le D(\rho_{j'},\rho_{l'}),\ \ \forall j',l'\ (j'\neq l') \tag{1}$$

M 元信号の中でトレース距離を用いて区別される近接 2 信号の最小誤り率を $P_{\mathrm{e}}^{\mathrm{binary}}$ と表し，以下の式で与えられる．

$$P_{\mathrm{e}}^{\mathrm{binary}} = \frac{1}{2}\{1-D(\rho_0,\rho_1)\} \tag{2}$$

2.2 近接信号の平均数

ある量子状態信号 ρ_k について, 以下の条件を満たす $D_{\min}(\rho_k)$ を ρ_k の最小トレース距離とする．このとき $D(\rho_k,\rho_j)$= $D_{\min}(\rho_k)$ となる ρ_j を ρ_k の近接信号と呼ぶ.

$$D_{\min}(\rho_k) = \min_{j\neq k} D(\rho_k,\rho_j) \tag{3}$$

ρ_j の近接信号の数を

$$N(k) = \#\left\{\rho_j \,\middle|\, D(\rho_k,\rho_j) = D_{\min}(\rho_k)\right\} \tag{4}$$

と表す．ここで，$\#S$ は，集合 S の要素数を意味する．近接信号の平均数は，以下のように定義される．

$$\langle N\rangle = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} N(k) \tag{5}$$

2.3 最小誤り率の近似式

$P_{\mathrm{e}}^{\mathrm{binary}}$ と $\langle N\rangle$ を用いて，M 元量子状態信号の最小誤り率の近似式 $P_{\mathrm{e}}^{\mathrm{approx}}$ は以下のように提案されている．

$$P_{\mathrm{e}}^{\mathrm{approx}} = \langle N\rangle P_{\mathrm{e}}^{\mathrm{binary}} \tag{6}$$

2.4 規格化近似精度

この近似式が真値に対してどの程度よい近似なのかを調べるにあたり，文献 [1, 2] では以下のような規格化近似精度を用いている．ここで $P_{\mathrm{e}}^{\mathrm{opt}}$ は M 元量子状態信号の真値を表す．

$$NA = \left|1-\frac{P_{\mathrm{e}}^{\mathrm{approx}}}{P_{\mathrm{e}}^{\mathrm{opt}}}\right| \tag{7}$$

この規格化近似精度は，値が小さいほど精度が良いことを示し，$NA=0$ となるとき，$P_{\mathrm{e}}^{\mathrm{approx}} = P_{\mathrm{e}}^{\mathrm{opt}}$ であることを表す．本研究においても，これを近似式の精度として用いる．

また，先行研究においてこの近似精度と近似値との比が誤り率が小さくなるにつれて 9/8 へ収束するという結果が得られている．本研究ではこの 9/8 という値へ収束する理由を明らかにし，それを証明する．

3 9/8 へ収束する理由

9/8 という数字に収束するのは 2 つの差の合計によるものであった．真値から近似値への差として，一つ目には多元信号における全信号への誤り率と，多元信号の中の 2 信号のみを考えた場合の誤り率との差があげられる．二つ目としては多元信号の中の 2 信号の誤り率と，2 信号のみを考えた場合の 2 信号の誤り率との差である．本研究ではこれらの差をそれぞれ “古典的な差” と “量子的な差” と呼び証明を行う．

3.1 古典的な差の証明

まず最初に古典的な差の証明から行う．この差は古典的な信号の場合には良い近似となることが多いことからこのような呼び方をするものとする．最小誤り率の真値は多元信号のそれぞれの信号への誤り確率の総和であるため，以下のように表すことができる．

$$P_{\mathrm{e}}^{\mathrm{opt}} = \sum_{i=0}^{M-1}\frac{1}{M}\sum_{j\neq i} P(j|i) \tag{8}$$

これは PSK 信号の場合以下のように表すことができる．

$$\sum_{j=1}^{M-1} P(j|0) \tag{9}$$

ここで $P(1|0) = P(M-1|0) = \varepsilon$ とおき，$P(2|0) = P(M-2|0) \approx (\frac{1}{2}\varepsilon)^2$，$P(3|0) = P(M-3|0) = O(\varepsilon^3)$ だと仮定すると，$P(3|0)$ 以降については十分に小さいと考えることができるため，以下のような関係で表すことができる．

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{e}}^{\mathrm{opt}} &= P(1|0)+P(2|0)+\cdots+P(M-1|0) \\ &\approx \varepsilon + \left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)^2 + \varepsilon \\ &= 2\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3) \end{aligned} \tag{10}$$

ここで $P_e^A = 2P(1|0)$ とすると以下のような関係が成り立つ．

$$\frac{P_e^{opt} - P_e^A}{P_e^A} / P_e^A \approx \frac{1}{8} \tag{11}$$

ここで現れる 1/8 が一つ目の差である古典的な差である．実際にこの式が成り立つことを証明するには $P(2|0) = P(M - 2|0) \approx (\frac{1}{2}\varepsilon)^2$ を証明する必要があるのだが，紙面の都合上ここでは省略する．

3.2 量子的な差の証明

次に量子的な差の証明を行う．量子的な差は多元信号で見た場合の 2 信号の誤り率と 2 信号のみを考えた場合の 2 信号の誤り率との差であり，それぞれ P_e^A と P_e^{approx} である．この式の証明をするためにまずは P_e^A について考えていく．P_e^A は PSK 信号における近接信号との 2 信号の誤り率であるため以下のように表すことができる．

$$P_e^A = 2P(1|0) = 2\left|\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} e^{-\mathbf{i}\frac{2\pi k}{M}} \sqrt{\sum_{l=0}^{M-1} e^{\mathbf{i}\frac{2\pi kl}{M}}\kappa_l}\right|^2 \tag{12}$$

ここで $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$ である．この式の平方根の内部に着目すると以下のように近似することができる．

$$\sqrt{\sum_{l=0}^{M-1} e^{\mathbf{i}\frac{2\pi kl}{M}}\kappa_l} \approx \sqrt{1 + 2\kappa\cos\frac{2\pi k}{M}} \tag{13}$$

このとき $\kappa = e^{-N_S\{1-\cos(2\pi/M)\}}$ であり N_S は平均光子数である．ここでこの近似した式について無限次のマクローリン展開を行うと以下のように展開できる．

$$\sqrt{1 + 2\kappa\cos\frac{2\pi k}{M}} = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}\left\{\prod_{m=0}^{l-1}\left(\frac{1}{2} - m\right)\right\} 2^l \cos^l\left[\frac{2\pi k}{M}\right]\kappa^l \tag{14}$$

ここで，$l - 1 < 0$ のとき，$\prod_{m=0}^{l-1} x_m = 1$ と考えられる．よって式の絶対値の中身は係数をのぞくと以下のように表さられる．

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{M-1} e^{-\mathbf{i}\frac{2\pi k}{M}} \sqrt{\sum_{l=0}^{M-1} e^{\mathbf{i}\frac{2\pi kl}{M}}\kappa_l} \\ &\approx \sum_{l=0}^{\infty}\frac{2^l}{l!}\left\{\prod_{m=0}^{l-1}\left(\frac{1}{2} - m\right)\right\}\sum_{k=0}^{M-1} e^{-\mathbf{i}\frac{2\pi k}{M}}\cos^l\left[\frac{2\pi k}{M}\right]\kappa^l\end{aligned} \tag{15}$$

また，このとき l の値で場合分けして $\sum_{k=0}^{M-1} e^{-\mathbf{i}\frac{2\pi k}{M}}\cos^l\left[\frac{2\pi k}{M}\right]$ を計算すると以下のようになる．

$$\sum_{k=0}^{M-1} e^{-\mathbf{i}\frac{2\pi k}{M}}\cos^l\left(\frac{2\pi k}{M}\right) = \begin{cases} 0, & l\text{ が偶数のとき} \\ \frac{1}{2^l}\begin{pmatrix} l \\ \frac{l-1}{2}\end{pmatrix} M, & l\text{ が奇数のとき}\end{cases} \tag{16}$$

この変形を利用することで式 (15) は以下のように表さられる．

$$\sum_{l=1(\text{奇数})}^{\infty}\frac{2^l}{l!}\left\{\prod_{m=0}^{l-1}\left(\frac{1}{2} - m\right)\right\}\frac{1}{2^l}\begin{pmatrix} l \\ \frac{l-1}{2}\end{pmatrix} M\kappa^l \tag{17}$$

ここで κ^l が 3 次の項まで展開する，このとき κ^l の 5 次以降の項については十分に小さいものとして考える．

$$\begin{aligned}&M\Big\{\frac{1}{1!}\left\{\prod_{m=0}^{1-1}(\frac{1}{2} - m)\right\}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-1}{2}\end{pmatrix}\kappa^1 \\ &\quad + \frac{1}{3!}\left\{\prod_{m=0}^{3-1}(\frac{1}{2} - m)\right\}\begin{pmatrix} 3 \\ \frac{3-1}{2}\end{pmatrix}\kappa^3\Big\} \\ &= \frac{M}{2}\left(1 + \frac{3}{8}\kappa^2\right)\kappa\end{aligned} \tag{18}$$

このことから最終的な P_e^A は以下のように表さられる．

$$\begin{aligned}P_e^A &\approx \frac{1}{M^2}\left|\frac{M}{2}\left\{5\left(1 - \frac{1}{8}\kappa^2\right) - 4\left(1 - \frac{1}{4}\kappa^2\right)\right\}\kappa\right|^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(1 + \frac{3}{8}\kappa^2\right)^2\kappa^2\end{aligned} \tag{19}$$

またトレース距離を用いた 2 信号の誤り率を用いて計算をすると $P_e^{approx} = 1 - \sqrt{1 - \kappa^2}$ となる．これらを用いて比の差の式を計算すると以下のような式が得られる．

$$\frac{P_e^A - P_e^{approx}}{P_e^{approx}} \Big/ P_e^{approx} \approx \frac{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{8}\kappa^2\right)^2\kappa^2 - (1 - \sqrt{1 - \kappa^2})}{(1 - \sqrt{1 - \kappa^2})^2} \tag{20}$$

本研究では誤り率が非常に小さくなる場合，つまりこの式について $N_S \to \infty$ となる極限を考える．この場合 $\kappa \to 0$ となる．これを考慮して計算すると以下の式のようになる．

$$\lim_{\kappa\to 0}\frac{P_e^A - P_e^{approx}}{P_e^{approx}} \Big/ P_e^{approx} = 1 \tag{21}$$

よって量子的な差が 1 となることが明らかになった．これらの差によって，古典的な差 1/8 と量子的な差 1 を足し合わせた 9/8 という値に収束していくことが証明された．

4 おわりに

本研究では最小誤り率の近似式について，その精度と近似値との比の収束先の理由を明らかにし証明を行った．この差は古典的な差と，量子的な差の 2 種類の差の合計によって成り立っていることを明らかにした．今後の課題としては本研究で用いた PSK 信号以外の信号での調査や，それらの結果からこの近似式のより一般的な性質を明らかにすることなどが挙げられる．

参考文献

[1] S. Asano, K. Nakahira, and T.S. Usuda, Proc. of AQIS2014, pp.171-172, (2014).

[2] S. Asano and T.S. Usuda, Proc. of ISITA2014, pp.254-258, (2014).

公表論文

1. **N. Matsumoto**, A. Kadoya, S. Takahira, Y. Nishino, and T.S. Usuda, Proc. of AQIS2017, pp.264-266, (2017)
2. **N. Matsumoto**, S. Takahira, and T.S. Usuda, AQIS2018, Nagoya, Extended Abstracts of AQIS2018, 202, (2018).

他 4 件 (筆頭著者)，3 件 (第二以降著者)