

1 次元波動方程式族の係数同定逆問題に対する安定な数値解法の研究

倉敷 大輔 指導教員：代田 健二

1 はじめに

本研究では、鉄とコンクリートによる合成梁の欠陥同定問題を例に、偏微分方程式の係数同定逆問題に対する位相最適化手法 [1] を応用した新たな数値解法を考察する。対象とする合成梁は、鉄とコンクリートの梁をボルトのような連結部材で数箇所接合して構成されている片持ち梁である (図 1)。

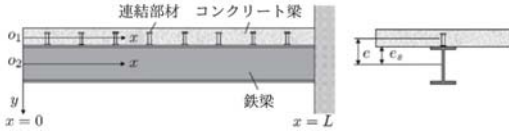


図 1 片持ち合成梁

本研究では、問題を単純化した強制自由振動モデル [2] を対象とする。このモデルでは、梁の縦方向の変位が鉄梁、コンクリート梁の両方で同じと仮定している。この仮定より、接合部の剛性は横方向のみ、つまりせん断剛性のみ考えればよいことになる。ここで、コンクリート梁を梁 1、鉄梁を梁 2 とする。\$u_i\$ (\$i = 1, 2\$) を梁 \$i\$ の \$x\$ 軸方向変位、\$v\$ を梁全体の \$y\$ 軸方向変位とする。\$w = {}^t(u_1, u_2, v)\$ とするとき、接触部せん断剛性を導入した強制自由振動モデルとして、次の初期値境界値問題が提案されている。

$$\begin{cases} Cw_{,tt} - A_k w = 0 & \text{in } (0, L) \times (0, T), \\ w(\cdot, t)|_{t=0} = 0, \quad w_{,t}(\cdot, t)|_{t=0} = 0 & \text{in } (0, L), \\ Dw(0, t) = \bar{U}(t), \quad Dw(L, t) = 0 & \text{on } (0, T). \end{cases} \quad (1)$$

\$w_{,tt}\$ は \$t\$ 方向の 2 階偏微分を表し、\$C = \text{diag}(\rho_1, \rho_2, \rho)\$ であり、\$\rho_i \in C^0[0, L]\$ は梁の線密度、\$\rho = \rho_1 + \rho_2\$ である。\$L\$ は梁の長さ、\$\bar{U} \in (C[0, T])^4\$ は与えられた関数とする。また \$D\$ は \$Dw = {}^t(u_1, u_2, v, v_{,x})\$ で定義される作用素であり、\$T\$ は観測時間の長さ、\$A_k\$ は次で定義される偏微分作用素である。

$$A_k w = \begin{Bmatrix} (a_1 u_{1,x})_{,x} + k(u_2 - u_1 + v_{,x} e_s) \\ (a_2 u_{2,x})_{,x} - k(u_2 - u_1 + v_{,x} e_s) \\ -(j v_{,xx})_{,xx} + (k(u_2 - u_1 + v_{,x} e_s) e_s) \\ \quad + (k e_c^2 v_{,x})_{,x} \end{Bmatrix}.$$

\$w_{,x}\$ は \$x\$ 方向の偏微分である。\$a_i \in C^1[0, L]\$、\$j_i \in C^2[0, L]\$ は、梁の軸剛性、曲げ剛性係数であり、\$j = j_1 + j_2\$ である。ここで各梁の線密度、剛性係数は既知であるとす、\$e_c, e_s\$ はコンクリート梁、鉄梁の厚さの半分の値とする。\$k \in C^1[0, L]\$ は、接触部分のせん断剛性であり、

$$0 \leq k(x) \leq \bar{k}, \quad \forall x \in [0, L] \quad (2)$$

を満たすものとする。ここで \$\bar{k}\$ は与えられた正定数であり、連結部材が劣化していないときの接触部せん断剛性値である。対象としているような合成梁の欠陥には、様々なことが考えられるが、本研究では連結部材の劣化のみに焦点を当てることにする。この連結部材劣化は、(1)でのせん断剛性 \$k\$ の値の低下と同値である。そこで本研究で扱う問題は、次のとおりとする。

合成梁接触部せん断剛性同定問題

\$x = 0\$ で与えられた Neumann 境界値と \$I \subseteq [0, L]\$ で与えられた \$x\$ 軸方向の変位 \$\bar{u}_i\$ より、接触部せん断剛性係数関数 \$k\$ を同定せよ。ただし Neumann 境界値 \$Q = {}^t(\bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{S}, \bar{M})\$ は次の通りである。

$$\begin{aligned} a_1 u_{1,x} \Big|_{x=0} &= \bar{N}_1, \quad a_2 u_{2,x} \Big|_{x=0} = \bar{N}_2, \\ -(j v_{,xx})_{,x} - k(u_2 - u_1 + v_{,x} e_s) - k e_c^2 v_{,x} \Big|_{x=0} &= \bar{S}, \\ -j v_{,xx} \Big|_{x=0} &= \bar{M}. \end{aligned}$$

本研究では、この係数同定逆問題に対して、位相最適化手法として提案された \$H^1\$ 勾配法 [3] を応用した数値解法を導出する。また数値実験により、導出された手法の有効性を検証する。

2 \$H^2\$ 勾配法

元の問題に対し、密度型問題を導入する。\$\phi \in C^2(\mathbb{R})\$ は \$0 \leq \phi(\xi) \leq 1, \forall \xi \in \mathbb{R}\$ を満たす関数とする。このとき設計変数関数 \$\theta \in C^1[0, L]\$ を用いて、密度型接触部せん断剛性係数

$$\tilde{k}(\theta) = \bar{k}\phi(\theta(x))$$

を導入する。導入された \$\tilde{k}(\theta)\$ は、関数の滑らかさとともに制約条件を満たしている。また設計変数関数 \$\theta\$ には、関数の滑らかさ以外に条件が付加されないことに注意する。この関数を用いた密度型順問題を、次のとおりに導入する。

$$\begin{cases} Cw_{,tt} - A_{\tilde{k}(\theta)} w = 0 & \text{in } (0, L) \times (0, T), \\ w|_{t=0} = 0, \quad w_{,t}|_{t=0} = 0 & \text{in } (0, L), \\ Dw|_{x=0} = \bar{U}, \quad Dw|_{x=L} = 0 & \text{on } (0, T). \end{cases} \quad (3)$$

密度型順問題 (3) を用いて、密度型せん断剛性係数同定問題を次のとおりに定義する。

密度型せん断剛性係数同定問題

\$x = 0\$ で与えられた Neumann 境界値 \$\bar{Q}(t)\$ (\$0 \leq t \leq T\$) と \$I \subseteq (0, L)\$ で与えられた \$x\$ 軸方向の変位 \$\bar{u}_i\$ より、設計変数関数 \$\theta \in C^1[0, L]\$ を同定せよ。

密度型せん断剛性同定問題を解くために、次の最小化問題を導入する。

最小化問題

$J : C^1[0, L] \rightarrow \mathbb{R}_+$ を最小にする $\theta \in C^1[0, L]$ を見つけよ。

$$J(\theta) = \int_0^T \frac{|Q[\tilde{k}(\theta)] - \bar{Q}|^2}{\|\bar{Q}\|_{L^2}^2} dt + \int_0^T \int_I \sum_{i=1}^2 \frac{|u_i[\tilde{k}(\theta)] - \bar{u}_i|^2}{\|\bar{u}\|_{I \times (0, T)}^2} dx dt.$$

ここで $Q[\tilde{k}(\theta)]$ は $\tilde{k}(\theta)$ を係数関数に持つ密度型順問題 (3) の解 $w[\tilde{k}(\theta)]$ により導出される $x = 0$ での Neumann 境界値である。この制約条件の無い最小化問題を解くことにより、設計変数を同定、すなわち未知の係数関数を同定する。最小化問題に必要な偏導関数は次のように得られる。

$$\frac{dJ}{d\theta}(\theta) = \frac{d\tilde{J}}{dk} \circ \frac{d\tilde{k}}{d\theta} \in (H^2(0, L))'.$$

ここで、 $\forall \varphi \in H^2(0, L)$ に対して、

$$\left\langle \frac{d\tilde{J}}{dk}(\tilde{k}), \varphi \right\rangle = \int_0^T \alpha_\varphi^{(1)}(w[\tilde{k}], \tilde{V}) dt + \langle CU_\varphi^{(\tilde{k})}(T), \frac{\Phi_Q(\cdot, T)}{\|\bar{Q}\|_{L^2}^2} \rangle - \langle CU_\varphi^{(\tilde{k})}(T), \frac{\partial_t \Phi_Q(\cdot, T)}{\|\bar{Q}\|_{L^2}^2} \rangle$$

となる。 $\alpha_\varphi^{(1)}(\cdot, \cdot)$ はモデル (1) より導出される双一次形式であり、 \tilde{V} 、 $U_\varphi^{(\tilde{k})}$ は随伴問題の解である。最小設計変数は、次の反復過程で求めることにする。

$$\theta_{\ell+1} = \theta_\ell + \epsilon_\ell \frac{s_\theta^{(\ell)}}{\|s_\theta^{(\ell)}\|_{H^2}} \quad (\ell = 0, 1, 2, \dots).$$

$\epsilon_\ell > 0$ は、適切に選択された探索の幅である。探索方向 s_θ は H^1 勾配法のアイディアにより求める。すなわち、 $J(\theta)$ の導関数を用いた次の問題の解により定めることにする。

$$a_\theta(s_\theta, \varphi) = - \left\langle \frac{dJ}{d\theta}(\theta)(\tilde{k}), \varphi \right\rangle, \quad \forall \varphi \in H^2(0, L).$$

ここで $a_\theta(\cdot, \cdot)$ は、次により定義される $H^2(0, L)$ 上の有界かつ強圧的な双一次形式である。

$$a_\theta(\varphi, \psi) = \alpha_\theta(\varphi'', \psi'')_{L^2} + \beta_\theta(\varphi', \psi')_{L^2} + \gamma_\theta(\varphi, \psi)_{L^2}.$$

$\alpha_\theta > 0$, $\beta_\theta > 0$, $\gamma_\theta > 0$ は与えられた正定数である。

3 数値実験

数値実験により、提案手法の有効性を検証する。実験における物理定数は、表 1 のとおりである。なお既知の剛性係数は、 $a_i = E_i A_i$, $j_i = E_i J_i$ により求められる。

表 1 物理定数 [4]

Constants	Value	Constants	Value
L^d	3.50 m	A_1^d	$3.00 \times 10^{-2} \text{ m}^2$
J_1^d	$9.00 \times 10^{-6} \text{ m}^4$	ρ_1^d	73.19 kg m^{-1}
E_1^d	$4.2863 \times 10^{10} \text{ N m}^{-2}$	A_2^d	$1.64 \times 10^{-3} \text{ m}^2$
J_2^d	$5.41 \times 10^{-6} \text{ m}^4$	ρ_2^d	12.90 kg m^{-1}
E_2^d	$2.1 \times 10^{11} \text{ N m}^{-2}$	e_s^d	0.07 m
e_c^d	0.03 m	T^d	$4.0 \times 10^{-3} \text{ s}$
n_p	16		

真のせん断剛性係数関数は、次のものを仮定する。

$$k(x) = \begin{cases} 11.85 + 3.95 \cos 14\pi(x - 3/7) & \left(\frac{3}{7} < x < \frac{4}{7} \right) \\ 15.80 & (\text{otherwise}) \end{cases}.$$

また ϕ は $\phi(\theta) = (1 + \tanh(10\theta))/2$ 、初期設計変数関数は $\theta_0 = 1.0$ 、内部観測範囲は $I = (L/5, L/4)$ とする。大きさの正規誤差 1% 誤差を含んだ観測データに対する同定結果は図 2 の通りである。欠陥の位置、大きさはおおよそ同定でき、かつ安定した同定結果を得ることができた。今後の課題は、探索方向決定におけるパラメータ選択方法やシグモイド関数などについて検討することで、精度の高い同定結果が得られるよう、方法を改良することである。

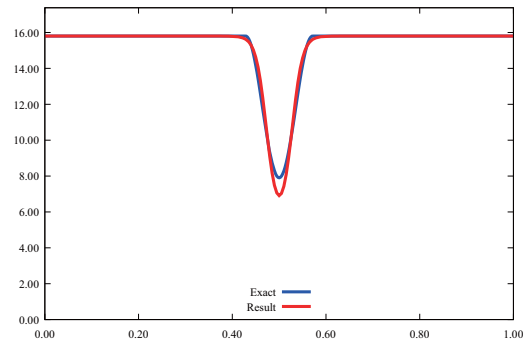


図 2 $I = [L/5, L/4]$, $\theta_0 = 1.0$, 1% 誤差

参考文献

- [1] M.P. Bendsøe and O. Sigmund, Topology Optimization: Theory, Method, and Application, Springer, 2004.
- [2] A. Morassi, G. Nakamura and M. Sini, An inverse dynamical problem for connected beams, European J. Appl. Math., Vol. 16 (2005), 83–109.
- [3] 畔上秀幸, 形状最適化問題, 森北出版, 2016.
- [4] M. Dilena and A. Morassi, A damage analysis of steel-concrete composite beams via dynamic methods: Part II. Analytical models and damage detection, J. Vib. Control, Vol.9 (2003), 529–565