共有機械数の重み付き和を考慮した時間マークグラフのスケジューリング問題の解法

情報科学科　山下　雄麻　　　指導教員：太田　淳

1　はじめに

スケジューリング問題とは、複数の仕事を限られた資源を用いて処理するときに、効率的な資源の割り当て方を求め、最適な手順を考える問題である。そのため、スケジューリング問題は、現実世界における多くの問題を解決するのに用いることができる。スケジューリング問題を速く効率的に解くことが、様々な分野で作業の効率化を目的に研究がされている。しかし、組み合わせ問題の一種であるスケジューリング問題は、考えられるスケジュールの組み合わせが膨大にあるため、解を求めることがとても困難である。そこで、ペトリネットを用いてモデル化を行い、スケジューリング問題の最適解を考える手法を考える。本研究では、繰り返し工程ジョブショップ型スケジューリング問題において、与えられた周期を実現するための機械数の重みつき和を最小にする問題を考えていく。この問題を時間ペトリネットを用いて混合整数計画問題として表し、定式化を行う。その後、MATLAB を用いることにより最適解を求め、その結果についての考察を行う。

2　問題設定

本研究では、以下に設定した問題について考察する。

1. 仕事の数を n_j、機械の種類数を n_m とし、機械はそれぞれ異なるものとする。1 つの種類の機械が複数台あってもよい。
2. 各仕事は n_m 種類の機械のそれぞれを用いる n_m 個の処理からなり、各仕事の処理の順序と各処理にかかる時間は, 決められているものとする。機械を使う順序は仕事によって異なる。
3. これらの仕事は繰り返し実行される。
4. 与えられた周期で仕事を繰り返し実行でき、機械数の重み付き和を最小にするようなスケジュールを求める。

この問題は各トランジションにそれが表す処理時間を発火継続時間とし、共有資源付きタイムマークグラフ N でモデル化される。ネット N は共有資源 R を持ち、共有資源プレース $r \in R$ とその入出力アークを除去すると、ネットは有向閉路を持たないマークグラフである。共有資源プレース $r \in R$ は、二つ以上のトランジションとそれぞれ往復アークによって接続される。初期マーキングでは, すべての共有資源プレース r が、それに対応する機械の台数に等しい個数のトークンを持ち、それ以外のプレースはトークンを持たない。

3　本研究で用いる解法

本研究では、機械数の重み付き和を最小化するスケジュールを求めるために、問題のペトリネットモデルから混合整数線形計画問題 (1) を導出し、MATLAB の intlinprog 関数 [2] を用いて解く。まず N の各共有資源プレース r_i とそれに接続しているアークの両方を共に除去し、$n_j(n_j-1)$ 個のプレース $q_{ijk}(1 \leq j,k \leq n_j,\ j \neq k)$ とアーク $(t_{ji}, q_{ijk}), (q_{ijk}, t_{ki})$ の付加を行う。ただし、t_{ji} は仕事 j の機械 i による処理を表すトランジションである。これによって得られたマークグラフ N' のマーキング配置最適化問題としてスケジューリング問題を定式化する。ここで、q_{ijk}, q_{ikj} に置かれたトークン数の和が機械 i の台数である。N' の入力接続行列を A^-、各トランジションの発火継続時間を要素とする列ベクトルを d_T、発火周期を C とする。文献 [1] による資源・時間積 (RTP) の不等式と非負 S-インバリアント y_k の積を表した式 $y_k^T M_0 C \geq y_k^T (A^-)^T d_T$ を、基本タイセット行列 B_f と各プレースの入力トランジションの発火継続時間 $d = (A^-)^T d_T$、スラック変数 z を用いて書き直し、$B_f M_0 C = B_f(d+z)$ が得られる。この式から機械数の重み付き和 wM_0 を最小化するための混合整数計画問題が得られる。

$$
\begin{aligned}
&\min \quad [w\ 0]\begin{bmatrix} M_0 \\ z \end{bmatrix} \\
&\text{s.t.} \\
&[B_f C\ \ -B_f]\begin{bmatrix} M_0 \\ z \end{bmatrix} = B_f d \\
&M_0 \geq 0\text{: integer},\ z \geq 0
\end{aligned}
\tag{1}
$$

4　実験

ジョブショップスケジューリング問題に対して、前節の方法で、最適な機械数の重み付き和を求める。その際、仕事数と機械数、機械の重みや周期の違いによって最適解とそれを求めるための計算時間がどのように変化するのかを調べることを目的として、実験を行った。本稿では 2 仕事 3 機械のジョブショップスケジューリング問題の例を挙げる。ここで各処理の処理時間は以下のとおりである。

表 1　仕事 J_i を機械 M_j で処理する順序

	Order1	Order2	Order3
J_1	$M_3(7)$	$M_2(6)$	$M_1(4)$
J_2	$M_3(5)$	$M_1(1)$	$M_2(6)$

機械の重み w は全て 1 とし、周期を 11 としたところ、$wM_0 = 5$ という結果が得られた。周期を大きくしていくと、最小の重み付き和が小さくなっていくことが確認できた。

5　おわりに

機械数の重み付き和を最小化する繰り返し工程ジョブショップ型スケジューリング問題を時間付きマークグラフでモデル化し、得られた混合整数計画問題を MATLAB で解くことで最適解が得られた。今後の課題として、より多くのデータに対して実験を行うことで、機械数や仕事数の変化によって重み付き和がどう変化するかが見えてくると考えている。

参考文献

[1] 村田忠夫『ペトリネットの解析と応用』近代科学社. 1992

[2] MathWorks『intlinprog 関数ドキュメント』`https://jp.mathworks.com/help/optim/ug/intlinprog.html`

[3] 木村彰吾『共有資源付きペトリネットのサブクラスにおける GA と厳密解法の融合によるスケジューリング問題の解法』愛知県立大学修士論文. 2017