相互レニー情報量規準に基づく SIC 情報源の性質に関する研究

佐藤 圭介　　　指導教員：臼田 毅

1　はじめに

量子情報理論は量子力学と情報理論を融合した理論である．本理論は量子コンピュータ，量子暗号，量子通信といった応用の基礎理論である．

量子論において，状態と測定は最も基本的な概念の一つである (e.g., [1])．基本的な概念の研究はその理論に対する理解を深めることは勿論，応用を考える上でも重要といえる．

Symmetric Informationally Complete(SIC) 集合は量子情報理論において有用な集合として知られている．SIC 集合に関する特に有名な性質は SIC 集合を用いて構成される量子測定がすべての量子測定の役割を果たすという性質である [2].

本研究では，2 次の相互レニー情報量を規準とした (SIC 集合を用いて構成される量子情報源である)SIC 情報源 [3] の性質を明らかにする．本研究結果より，SIC 情報源はすべての量子状態を持つ量子情報源である Scrooge 情報源 [4] に似た性質を持つことがわかる．これは 2 次の相互レニー情報量 [5] を規準として，SIC 情報源がすべての量子状態の役割を果たす可能性を示唆しているといえる．

2　量子情報源と量子測定

量子状態は d 次元複素ヒルベルト空間 $\mathcal{H}_d$ の単位ベクトル $|\psi\rangle$ によって表される．量子情報源 $\mathcal{E}$ とは，m 個の量子状態の集合 $\{|\psi_i\rangle\}_{i=0}^{m-1}$ とそれらの先験確率 p_i の組のことである．$\mathcal{E}$ に対して，その密度作用素 $\rho = \sum_{i=0}^{m-1} p_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ が唯一に定まる．

量子状態から情報を得るためには量子測定を行う必要がある．量子測定は positive-operator valued measure(POVM) $\Pi = \{\Pi_j\}_{j=0}^{n-1}$ によって表される．ここで，POVM Π とは $\sum_{j=0}^{n-1} \Pi_j = I$ を満たす半正定値作用素 Π_j の集合である．各 Π_j に対して，$\Pi_j = |\phi_j\rangle\langle\phi_j|$ を満たすようなベクトル $|\phi_j\rangle \in \mathcal{H}_d$ が存在する場合，この POVM をランク 1 POVM と呼ぶ．

POVM は量子測定の最も一般的な表現であるため，以降，量子測定のことを単に POVM と呼ぶこともある．

$|\psi_i\rangle$ を Π によって測定したときに結果 j を得る確率は $P(j|i) = \langle\psi_i|\Pi_j|\psi_i\rangle$ のように表される．$\mathcal{E}$ から結果 j を得る確率は $P(j) = \mathrm{Tr}\,[\Pi_j\rho]$ のように計算される．

3　相互レニー情報量

α 次の相互レニー情報量 [5] は実数 $\alpha \in (0,1)\cup(1,\infty)$ を用いた (シャノンの) 相互情報量の拡張である．

定義 1（**α 次の相互レニー情報量 [5]**）

$$R_\alpha(\Pi) := \frac{1}{1-\alpha}\ln\left(\sum_{j=0}^{n-1} P(j)^\alpha\right), \tag{1}$$

$$R_\alpha(\Pi|\mathcal{E}) := \sum_{i=0}^{m-1} p_i \frac{1}{1-\alpha}\ln\left(\sum_{j=0}^{n-1} P(j|i)^\alpha\right) \tag{2}$$

とする．

$$I_\alpha(\Pi,\mathcal{E}) := R_\alpha(\Pi) - R_\alpha(\Pi|\mathcal{E}) \tag{3}$$

を α 次の相互レニー情報量と呼ぶ．

POVM に関する相互情報量の最大値をアクセシブル情報量と呼び，密度作用素にのみ依存したその下界はサブエントロピーとして知られている．これらの概念を α 次の相互レニー情報量規準に拡張したものはそれぞれ α 次のアクセシブルレニー情報量と α 次のレニーサブエントロピー [6] と呼ばれる．

定義 2（**α 次のアクセシブルレニー情報量**）　α 次の相互レニー情報量 $I_\alpha(\Pi,\mathcal{E})$ の POVM に関する最大値を α 次のアクセシブルレニー情報量 $I_\alpha(\mathcal{E})$ と呼ぶ: $I_\alpha(\mathcal{E}) := \max_\Pi I_\alpha(\Pi,\mathcal{E})$.

定義 3（**α 次のレニーサブエントロピー [6]**）　ρ を d 次元ヒルベルト空間上の密度作用素とし，λ_k を ρ の固有値とする．

$$Q_\alpha(\rho) := \frac{1}{1-\alpha}\ln\left(\sum_{k=0}^{d-1}\frac{\lambda_k^{\alpha+d-1}}{\prod_{l=0,l\neq k}^{d-1}(\lambda_k-\lambda_l)}\right) \tag{4}$$

を α 次のレニーサブエントロピーと呼ぶ．

残念ながら，α 次のレニーサブエントロピーが α 次のアクセシブルレニー情報量の下界かどうかは知られていない．

本稿では $\alpha = 2$ を主に考えるため，“2 次の”を省略する．

4　SIC 情報源と Scrooge 情報源

4.1　SIC 情報源

SIC 情報源は SIC 集合から構成される量子情報源である．まずは SIC 集合の定義を紹介する．

定義 4（**SIC 集合**）

$$|\langle\psi_k|\psi_{k'}\rangle|^2 = \frac{1}{d+1} \quad (k \neq k') \tag{5}$$

を満たす d^2 個の単位ベクトル $|\psi_k\rangle \in \mathcal{H}_d$ の集合を d 次元 SIC 集合と呼ぶ．

一つを除き，すべての知られている SIC 集合は Weyl–Heisenberg 共変性を有する．このため，本稿では Weyl–Heisenberg 共変的 SIC 集合のみを考える．表記の簡単化のため，Weyl–Heisenberg 共変的 SIC 集合を単に SIC 集合と書く．

定義 5（**SIC 情報源 [3]**）　d 次元 SIC 集合 $\{|\psi_i\rangle\}$ と等先験確率 d^{-2} の組を d 次元 SIC 情報源 $\mathcal{E}^{(\mathrm{SIC})}$ と呼ぶ．

SIC 情報源はヒルベルト空間の quantumness を達成するということが知られている [3].

4.2　Scrooge 情報源

Scrooge 情報源とはヒルベルト空間のすべての量子状態を有する量子情報源として知られている [4]．一般には任意の密度作用素を持つ Scrooge 情報源を考えることができるが，本稿では密度作用素 $\frac{1}{d}I$ を持つ Scrooge 情報源のみを考え，これを単に Scrooge 情報源と呼ぶ．

Scrooge 情報源は次の 4 つの性質を持つことが知られている．

1. 完全直交測定で測定したとき，測定の種類に依らずに相互情報量は定数となる [4].
2. アクセシブル情報量は任意の完全直交測定によって達成される [4].

3. アクセシブル情報量がサブエントロピーと一致する [4].
4. ヒルベルト空間の quantumness を達成する [6].

前節の最後で述べたことに注意すると，4 つ目の性質 [3] は SIC 情報源の性質と同じである．以降では，相互レニー情報量を規準とすることで，SIC 情報源が Scrooge 情報源の性質 1, 2, 3 と似た性質を持つことを述べる．

5 相互レニー情報量を規準とした SIC 情報源の性質

相互レニー情報量を規準とした SIC 情報源の 4 つ性質を述べる．この 4 つの性質は第 4.2 節で述べた Scrooge 情報源の性質 1, 2, 3 によく似た性質である．さらに，数値実験により，述べた SIC 情報源の性質が任意の α に対して拡張できないことを示す．

まず，Scrooge 情報源の 1, 2, 3 つ目に対応する命題を述べる．

命題 6 d 次元 SIC 情報源 $\mathcal{E}^{(\mathrm{SIC})}$ を Weyl–Heisenberg 共変的なランク 1 POVM で測定したとき，測定の種類に依らずに相互レニー情報量は定数となる．

命題 7 d 次元 SIC 情報源 $\mathcal{E}^{(\mathrm{SIC})}$ のアクセシブルレニー情報量は任意の Weyl–Heisenberg 共変的なランク 1 POVM によって達成される．

命題 8 d 次元 SIC 情報源 $\mathcal{E}^{(\mathrm{SIC})}$ のアクセシブルレニー情報量は密度作用素 $\frac{1}{d}I$ に対するレニーサブエントロピーと一致する．

いま，サブエントロピーがアクセシブル情報量の下界であったことを思い出すと，Scrooge 情報源の 3 つ目の性質は “すべての (密度作用素 $\frac{1}{d}I$ を持つ) 量子情報源の中でアクセシブル情報量が最小である” と言い直すことができる．これに注意して，SIC 情報源のさらなる性質を述べる．

命題 9 d 次元 SIC 情報源 $\mathcal{E}^{(\mathrm{SIC})}$ のアクセシブルレニー情報量はすべての Weyl–Heisenberg 共変的量子情報源 $\mathcal{E}^{(\mathrm{WH})}$ の中で最小である．

残念ながら，命題 9 は SIC 情報源のアクセシブルレニー情報量がすべての量子情報源の中で最小であるということは保証しない．しかしながら，少なくとも Weyl–Heisenberg 共変的量子情報源と呼ばれるクラスの中で，SIC 情報源は Scrooge 情報源によく似た性質を持つことを保証する．

次に，命題 6, 7, 8 が一般の α に拡張できないことを示す．図 1 は Weyl–Heisenberg 共変的なランク 1 POVM と 2 次元 SIC 情報源の間の α 次の相互レニー情報量である．灰色，赤色，青色，緑色，橙色の線はそれぞれ $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$ 次の相互レニー情報量を表している[*1]．横軸は Weyl–Heisenberg 共変的なランク 1 POVM のパラメータ θ であり，POVM の変化を表している．明らかに $\alpha = 2$ 以外では Weyl–Heisenberg 共変的なランク 1 POVM の種類に依存しているため，命題 6 と 7 は一般の α に拡張できないことがわかる． 図 2 は 2 次元 SIC 情報源の α 次のアクセシブル情報量[*2]と $\frac{1}{2}I$ に対する α 次のレニーサブエントロピーを示している．青色と赤色の線がそれぞれ α 次のアクセシブル情報量と α 次のレニーサブエントロピーである．$\alpha = 2$ 以外の点では，SIC 情報源の α 次のアクセシブル情報量

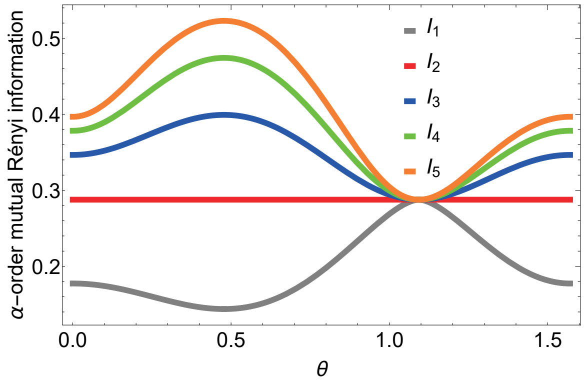

図 1 Weyl–Heisenberg 共変的なランク 1 POVM と 2 次元 SIC 情報源の間の α 次の相互レニー情報量

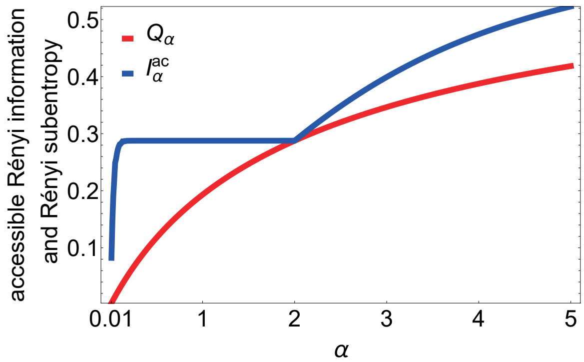

図 2 2 次元 SIC 情報源の α 次のアクセシブルレニー情報量と $\frac{1}{2}I$ に対する α 次のレニーサブエントロピー

は α 次のレニーサブエントロピーを超えていることがわかる．これより，命題 8 が一般の α に拡張できないことがわかる．

6 おわりに

本研究では，2 次の相互レニー情報量を規準とした SIC 情報源の性質を明らかにし，その性質が Scrooge 情報源の性質によく似ていることを述べた．Scrooge 情報源はすべての量子状態を有する量子情報源であった．したがって，本研究の結果は 2 次の相互レニー情報量を規準として SIC 情報源がすべての量子状態を有することを示唆していると考えられる．

参考文献

[1] A. S. Holevo, North-Holland, (1982).
[2] J. M. Renes, *et. al.*, J. Math. Phys. **45**, pp.2171-2180, (2004).
[3] C. A. Fuchs, Quantum Information, Statistics, Probability: Dedicated to A.S. Holevo on the Occasion of His 60th Birthday, edited by O. Hirota (Rinton Press, Princeton, NJ, 2004), pp.65-77, (2004).
[4] R. Jozsa, *et. al.*, Phys. Rev. **A49**, pp.668-677, (1994).
[5] C. H. Bennett, *et. al.*, IEEE Trans. Inform. Theory **41**, pp.1915-1923, (1995).
[6] F. Mintert, K. Życzkowski, Phys. Rev. **A69**, 022317, (2004).

公表論文

1). **K. Sato**, S. Takahira, K. Nakahira, and T. S. Usuda, Extd. Abst. of AQIS2019, **155**, (2019).
2). **K. Sato**, S. Takahira, and T. S. Usuda, QCMC2018, **P80**, (2018).
他 7 件 (筆頭著者)，3 件 (第二著者)

[*1] 表記の簡単化のため，相互情報量を 1 次の相互レニー情報量 I_1 と表す．
[*2] 正確には，アクセシブル情報量の下界である．