Caliber の 2 冪可除性

情報科学科　大嶋 稔　　　指導教員：田坂 浩二

1　序文

整係数二次多項式 $f(x)$ の根 ω を二次無理数と呼ぶ. $f(x)$ の判別式が D のとき, $\mathrm{disc}(\omega) = D$ と書き, ω は D に属するという. $D > 0$ に対し, $Q(D)$ を判別式 D に属する簡約二次無理数の集合とする.

$$Q(D) := \{\omega | \mathrm{disc}(\omega) = D,\ -1 < \omega' < 0,\ 1 < \omega\}.$$

集合 $Q(D)$ は有限集合である ([1]). $Q(D)$ の要素数を判別式 D の *Caliber* と呼び, $\kappa(D)$ と表記する.

$$\kappa(D) := \#Q(D).$$

$x, y \in Q(D)$ に対し， $y = (ax+b)/(cx+d)$ を満たす $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z})$ が存在するとき， x と y は対等であるといい, $x \sim y$ と書く. 対等は同値関係である. 対等による $Q(D)$ の同値類の個数を類数と呼び, $h(D)$ を表す.

$$h(D) := \#Q(D)/\sim.$$

類数は重要な数として扱われており, その 2 冪可除性について古くから多くの研究がなされている. 本研究ではその問題の類似として *Caliber* の 2 冪可除性を議論する.

2　先行研究

[2, 3] において *Caliber* の偶奇性に関して次の結果が得られている.

定理 ([2, 定理 2.0.8.]) (1) $D = 8$ または $p \equiv 1 \pmod 4$ となる素数に対し, $D = p^k$ または $4p^k$ ならば $\kappa(D) \equiv 1 \pmod 2$.

(2) そのほかの $D > 0$ の場合は $\kappa(D) \equiv 0 \pmod 2$.

この定理により, (1) の条件を満たさない判別式 D については 2 で少なくとも 1 回は割れることがわかる.

3　主結果

本研究の主結果は以下である.

定理 $D > 0$ を判別式とする.

(I) $p = 3$ または $p \equiv 1 \pmod 4$ となる素数 $p \le 1000$ に対し, $\kappa(16p) \equiv 2 \pmod 4$.

(II) $p = 3$ を除く $p \equiv 3 \pmod 4$ となる素数 $p \le 1000$ に対し, $\kappa(16p) \equiv 0 \pmod 4$.

(III) $p \equiv 1 \pmod 4$, $q \equiv 3 \pmod 4$ なる素数 p, q からなる数 $pq \le 1000$ に対し, $\kappa(4pq) \equiv 0 \pmod 4$.

(IV) $p \equiv 3 \pmod 8$ となる素数 $p \le 1000$ に対し, $\kappa(4p) \equiv 2 \pmod 4$.

(V) $p \equiv 7 \pmod 8$ となる素数 $p \le 1000$ に対し, $\kappa(4p) \equiv 0 \pmod 4$.

これは $\kappa(D)$ が 4 で割ることができる判別式とそうではない判別式についての部分的な結果となっている.

4　主結果の証明

証明方法は Caliber を具体的に計算することである. 判別式 D に属する実二次無理数 ω に対し, $a\omega^2 + b\omega + c = 0$ を満たす $GCD(a, b, c) = 1$, $D = b^2 - 4ac$ となる $a, b, c \in \mathbb{Z}$ が存在する. このとき, $\omega \in Q(D)$ ならば,

$$-\sqrt{D} < b < 0 \tag{1}$$

であり, a, c について,

$$\frac{\sqrt{D} - |b|}{2} < a < \frac{\sqrt{D} + |b|}{2}, \tag{2}$$

$$\frac{\sqrt{D} - |b|}{2} < |c| < \frac{\sqrt{D} + |b|}{2} \tag{3}$$

でなくてはならないことがわかる [1]. よって, (1), (2), (3) を満たす (a, b, c) の組を探すことにより, *Caliber* が計算できる. 実際に $\kappa(D)$ を計算することでこれを証明できた. そのデータの一部をページ下に記載する.

5　今後の課題

今後の課題は定理 (I) から (V) を理論的に証明することである. また, 他の $\kappa(D)$ の $\pmod 4$ での値の規則性を見つける.

参考文献

[1] 高木 貞治, ”初等整数論講義 第 2 版” 共立出版

[2] 坂田 英幸, ”実 2 次簡約無理数の個数の偶奇について” 九州大学大学院数理学府 平成 24 年度修士論文

[3] Masanobu Kaneko, Hideyuki Sakata, and Maiko Takeuchi, ”On the parity of calibers of real quadratic orders” Siauliai Mathematical Seminar, 11 (19), 35–43, (2016)

表 1　定理 (I) 計算結果

D	$\kappa(D)$
48	2
80	2
208	6
272	2
⋮	
15632	42
15952	66

表 2　定理 (II) 計算結果

D	$\kappa(D)$
112	4
176	8
304	12
368	8
⋮	
15728	20
15856	124

表 3　定理 (III) 計算結果

D	$\kappa(D)$
60	4
140	4
156	8
204	8
⋮	
3916	48
3980	28

表 4　定理 (IV) 計算結果

D	$\kappa(D)$
12	2
44	2
76	6
172	10
⋮	
3788	22
3884	22

表 5　定理 (IV) 計算結果

D	$\kappa(D)$
28	4
92	4
124	8
188	4
⋮	
3932	8
3964	60