

スカラー波動方程式のソース項同定問題に対する正則化解法

情報科学科 辻村 賢祐

指導教員：代田 健二

1 はじめに

本研究では震源同定を代表とするスカラー波動方程式のソース項同定問題に対する数値解法について考察する。

$\Omega \subset \mathbb{R}^n (n = 2, 3)$ は滑らかな境界 $\partial\Omega$ をもつ有界かつ凸な領域とし、 T は観測時間の長さとする。このとき、本研究で対象とするスカラー波動方程式は以下のとおりである。

$$\begin{cases} u_{tt}(\mathbf{x}, t) - \nabla \cdot K(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x}, t) = \lambda(t) f(\mathbf{x}) & \text{in } \Omega \times (0, T], \\ u(\mathbf{x}, 0) = u_0, \quad u_t(\mathbf{x}, 0) = v_0 & \text{in } \Omega, \\ u(\mathbf{x}, t) = g & \text{on } \partial\Omega \times (0, T], \end{cases} \quad (1)$$

ここで $u_0|_{\partial\Omega} = g(\cdot, 0), v_0|_{\partial\Omega} = g_t(\cdot, 0)$ が成り立つ。また $\lambda(t)$ と $K(\mathbf{x})$ は与えられた関数であり、それぞれ次の条件を満たすとする。

$$\begin{aligned} \lambda &\in C^\infty[0, +\infty); \quad \lambda(0) \neq 0 \\ K &\in L^\infty(\Omega); K(\mathbf{x}) \geq K_0 > 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \end{aligned}$$

ここで、 K_0 は与えられた正定数である。このとき、適切な仮定の下で、順問題 (1) の解 $u(\mathbf{x}, t)$ はただ一つ存在する [1]。

倉敷は 1 次元波動方程式族の係数同定逆問題に対して、 H^1 勾配法を元に安定な数値解法を提案した [2]。本研究ではスカラー波動方程式のソース項同定問題に対して、倉敷の提案した数値解法を元に、安定した数値解法を開発することを目的とする。

2 ソース項同定問題に対する H^1 勾配法

$\omega \subseteq \Omega$ とする。本研究で対象とする逆問題は、次のとおりである：

ソース項同定問題

与えられた内部観測 $\bar{u}(\mathbf{x}, t)$ ($(\mathbf{x}, t) \in \omega \times (0, T]$) よりソース項関数 $f(\mathbf{x})$ を同定せよ。

ソース項同定問題を解くために内部観測データを用いた汎関数 $J: L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}_+$ を以下のとおりに定義する。この汎関数を最小化する関数 f を見つけることでソース項を同定する。

$$J(f) = \int_0^T \int_\omega \frac{|u[f] - \bar{u}|^2}{\|\bar{u}\|^2} dx dt$$

ここで $u[f]$ は、 f が与えられたときの (1) の解である。

汎関数の最小化関数を求めるために勾配法 [3] を用いる。そのため、汎関数 J の導関数が必要である。汎関数 J の導関数は以下のとおりに求められる。 $w(\mathbf{x}, t)$ は、随伴問題の解である。

$$\left\langle \frac{dJ}{df}, \delta f \right\rangle = \int_0^T \int_\Omega \lambda(t) w(\mathbf{x}, t) \delta f dx dt$$

3 H^1 勾配法

汎関数の最小化関数は、次の反復過程で求めることにする。

$$f_{k+1} = f_k + \varepsilon_k \frac{s^k}{\|s^k\|_{H^1}} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

$\varepsilon > 0$ は、適切に選択された探索幅の基準である。探索方向 s は H^1 勾配法 [3] のアイデアにより求める。すなわち汎関数 J の導

関数を用いた次の問題の解により定めることにする。

$$a(s, \varphi) = -\left\langle \frac{dJ}{df}, \varphi \right\rangle, \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega)$$

ここで $a(\cdot, \cdot)$ は、次に定義される $H^1(\Omega)$ 上の有界かつ強圧的な双一次形式であり、次のとおりに与える。ただし $\alpha > 0$ は与えられた正定数である。

$$a(s, \varphi) = (\nabla s, \nabla \varphi)_{L^2} + \alpha (s, \varphi)_{L^2}$$

4 数値実験

本実験では観測データの領域を $\omega = \Omega$ とする。数値実験で用いた設定を表 1 に示す。各種関数は観測データ $\bar{u} = u(x, y, t)$ に対して (1) 式が成り立つように設定している。

表 1 実験用モデル

$u(x, y, t) = \cos(2t)e^{-(x+y)^2}$	$u_0 = e^{-(x+y)^2}$
$g(x, y, t) = \cos(2t)e^{-(x+y)^2}$	$v_0 = 0$
$K(x, y) = 1.0$	$\lambda(t) = \cos 2t$
$T = 1.75$	$f_0 = 0$
真の解 $f(x, y) = -2(2x + 2y)^2 e^{-(x+y)^2}$	

図 1 は真の解のグラフを示している。図 2 は数値解法による近似解の結果を示している。また、観測データ \bar{u} に乱数を用いて 5% の観測誤差を与えたときの近似解を図 3 と図 4 に示す。数値実験結果より、提案手法におけるパラメータ α を適切に与えることで、安定な数値解を得られることが示唆された。適切なパラメータ α を選択する基準を構築するのが、今後の課題である。

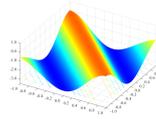
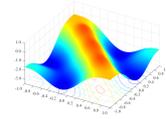
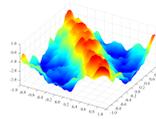
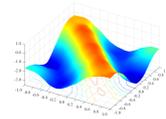


図 1 真の解

図 2 誤差なし, $\alpha = 1.0$ 図 3 誤差 5%, $\alpha = 0.01$ 図 4 誤差 5%, $\alpha = 1.0$

参考文献

- [1] J. Wolka, Partial Differential Equations, Cambridge University Press, 2008.
- [2] D. Kurashiki and K. Shirota, H^2 gradient method for the coefficient identification problem in a partial differential equation, JSIAM Letters, Vol. 10, pp. 37-40, 2018.
- [3] 畔上秀幸, 形状最適化問題, 森北出版, 2016.