量子フェージング通信路のハイゼンベルク表示モデルの研究

情報科学科　中川 綾太　　　指導教員：臼田 毅

1　はじめに

量子フェージング通信路を扱った研究として，アナログ量子通信の中で Personick によって示されたハイゼンベルグ表示モデル [1] と，ディジタル量子通信の中で喜多らによって示されたシュレーディンガー表示モデル [2] がある．ディジタル量子通信の性能解析のためには，ハイゼンベルグ表示ではなくシュレーディンガー表示を考える必要があり，喜多らは Personick の研究結果は使わずに一からモデルの検討を行った．

本研究は，現実的な通信路モデルの検討のため，上記の 2 つの量子フェージング通信路モデルの関係を明らかにすることを目的とする．まず，喜多らのモデルに対応するハイゼンベルグ表示モデルの検討を行う．次に，Personick のモデルと喜多らのモデルにおける電場の期待値の導出とその比較を行う．本稿では，紙面の都合上，前者ついて説明する．

2　シュレーディンガー表示による量子フェージング通信路の表現

本節では，喜多らによるシュレーディンガー表示モデル [2] について説明する．量子通信路への入力量子状態（密度作用素）を $\rho^{(\mathrm{in})}$ とすると，出力量子状態 $\rho^{(\mathrm{out})}$ は次式で表される．

$$\rho^{(\mathrm{out})}=\int_0^1 P(\eta)\left(\sum_{k=0}^{\infty}E_k(\eta)\rho^{(\mathrm{in})}E_k^{\dagger}(\eta)\right)d\eta \tag{1}$$

ここで，η はエネルギー透過率であり，$P(\eta)$ は η の確率分布である．また，$E_k(\eta)$ は次式で表される量子減衰通信路のクラウス作用素である．

$$E_k(\eta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{\binom{n}{k}}\sqrt{\eta^{n-k}(1-\eta)^k}|n-k\rangle\langle n| \tag{2}$$

3　シュレーディンガー表示に対応するハイゼンベルグ表示による通信路の表現

2 節のシュレーディンガー表示に対応するハイゼンベルグ表示モデル（以下「本モデル」と称する）について説明する．エネルギー透過率 η で物理量（作用素）が減衰するモデル [3] を用いて検討した本モデルを次式に示す．

$$\hat{a}_{\mathrm{out}}=\int_0^1 P(\eta)\sqrt{\eta}d\eta\cdot\hat{a}_{\mathrm{in}}+\int_0^1 P(\eta)\sqrt{1-\eta}d\eta\cdot\hat{a}_{\mathrm{v}} \tag{3}$$

ただし，送信場と受信場の複素振幅作用素を $\hat{a}_{\mathrm{in}}$ と $\hat{a}_{\mathrm{out}}$ とし，真空場の複素振幅作用素 $\hat{a}_{\mathrm{v}}$ としている．

さて，ハイゼンベルグ表示モデルを考えるうえで重要となるのが不確定性原理であり，不確定性原理により非可換な 2 つの物理量を同時に正確には測定することができない．物理量の非可換性は不確定性原理の大元となる性質であるため，$\hat{a}_{\mathrm{out}}$ において，いかなる時間発展を経ても物理量の非可換性を表す交換関係が保存されなければならない．そこで，$\hat{a}_{\mathrm{out}}$ と $\hat{a}_{\mathrm{out}}^{\dagger}$ の交換関係を確認すると次式となる．

$$[\hat{a}_{\mathrm{out}},\hat{a}_{\mathrm{out}}]=\left(\int_0^1 P(\eta)\sqrt{\eta}d\eta\right)^2+\left(\int_0^1 P(\eta)\sqrt{1-\eta}d\eta\right)^2 \tag{4}$$

式 (4) で示した本モデルの複素振幅作用素の交換関係は，一般的な確率分布 $P(\eta)$ を用いた場合では保存できず，$P(\eta)$ をインパルス関数に近い確率分布とすれば交換関係を保存することができる．したがって，特定の $P(\eta)$ に対しては，本モデルが喜多らのモデルに対応すると考え，直交振幅の期待値および分散の比較を用いて，近似モデルの精度を検討する．

まず，喜多らのモデルにおける直交振幅の期待値および分散は次式となる．

$$\left\langle \hat{X}_{\mathrm{C}}\right\rangle=\mathrm{Re}[\alpha]\int_0^1 P(\eta)\sqrt{\eta}d\eta \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\left\langle\left(\Delta\hat{X}_{\mathrm{C}}\right)^2\right\rangle&=(\mathrm{Re}[\alpha])^2\int_0^1 P(\eta)\eta d\eta+\frac{1}{4}\int_0^1 P(\eta)d\eta\\&\quad-\left(\mathrm{Re}[\alpha]\int_0^1 P(\eta)\sqrt{\eta}d\eta\right)^2\end{aligned} \tag{6}$$

一方，本モデルの直交振幅の期待値および分散は次式となる．

$$\left\langle \hat{X}_{\mathrm{C}}^{(\mathrm{out})}\right\rangle=\mathrm{Re}[\alpha_{\mathrm{in}}]\int_0^1 P(\eta)\sqrt{\eta}d\eta \tag{7}$$

$$\begin{aligned}\left\langle\left(\Delta\hat{X}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{out}}\right)^2\right\rangle&=\left\{(\mathrm{Re}[\alpha_{\mathrm{in}}])^2+\frac{1}{4}\right\}\cdot\left(\int_0^1 P(\eta)\sqrt{\eta}d\eta\right)^2\\&\quad+\frac{1}{4}\left(\int_0^1 P(\eta)\sqrt{1-\eta}d\eta\right)^2\\&\quad-\left(\mathrm{Re}[\alpha_{\mathrm{in}}]\int_0^1 P(\eta)\sqrt{\eta}d\eta\right)^2\end{aligned} \tag{8}$$

ガウス分布およびレイリー分布を用いて数値計算を行ったところ，直交振幅の期待値は $P(\eta)$ に関わらず一致するが，分散は分布形をインパルス関数に近づけた場合に，近似的に一致することが明らかになった．

4　まとめ

本稿では，喜多らのモデルに対応するハイゼンベルグ表示モデルの検討を行った．本モデルは，複素振幅作用素の交換関係を保存しないという意味で厳密なものでは無いが，減衰率の確率分布によっては交換関係が近似的に成り立ち，直交振幅の期待値および分散も近似的に一致することが明らかになった．

参考文献

[1] S.D. Personick, Res. Lab. Electron., M. I. T., Cambridge, Tech. Rep. **477**, (1970).

[2] 喜多, 小山, 田中, 臼田, 平成 27 年度電気・電子・情報関係学会東海支部連合大会, K1-7, (2015).

[3] 光通信理論研究会編, スクィズド光, 森北出版, (1990).

公表論文

1. 中川, 王, 臼田, 令和元年度電気・電子・情報関係学会東海支部連合大会, F4-3, (2019).
2. 中川, 王, 臼田, 第 17 回情報学ワークショップ, P216, (2019).
3. 中川, 王, 臼田, 第 42 回情報理論とその応用シンポジウム, pp.135-139, (2019).