

位相最適化問題に対する H1 勾配法のパラメータ選択基準の研究

情報科学科 伊藤 魁人

指導教員：代田 健二

1 はじめに

ものづくりの現場では、数値解析の結果を設計に用いて効率を高める方法に関心が高まっており、そのうちのひとつに位相最適化問題がある。しかし、位相最適化問題は非適切問題であることが知られており、位相最適化問題に対して最急降下法を適用し近似解を求めようとすると、数値不安定現象が発生する。そこで畔上 [1] は、数値不安定現象の原因を“設計空間と勾配の属する関数空間の違い”と考え、関数空間の違いを補正するアイデアを組み入れた H1 勾配法を提案した。H1 勾配法は現在までに様々な問題に適用され、製品設計の現場でも活用されている。

一方、H1 勾配法の重要な部分では、パラメータを選択して使用する必要があるものの、パラメータの選択方法や同定結果への影響について考察されてこなかった。そこで本研究の目的は、H1 勾配法におけるパラメータの同定結果への影響を数値実験により検証し、それに基づいてパラメータ選択時の基準を提案する。

2 H1 勾配法

ポアソン方程式に対する位相最適化問題を例として、H1 勾配法 [1] を示す。 $D \subset \mathbb{R}^2$ を有界な一様 Lipschitz 領域とする。 ∂D は D の境界を表し $\Gamma_D \subset \partial D$ は $|\Gamma_D| \neq 0$ を満たす Dirichlet 境界、 $\Gamma_N = \partial D \setminus \Gamma_D$ は Neumann 境界とする。このとき、次の境界値問題を考える。

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\phi^\alpha(\theta) \nabla u) = b & \text{in } D, \\ u = u_D & \text{on } \Gamma_D, \\ \phi^\alpha(\theta) \frac{\partial u}{\partial \nu} = p & \text{on } \Gamma_N \end{cases} \quad (1)$$

ここで、 p は適切に与えられた関数、 ν は外向き単位法線ベクトルである。コスト関数は $f_0(\theta, u) = \int_D f u dx$ 、制約汎関数は $f_1(\theta) = \int_D \phi(\theta) dx - \frac{1}{2}$ とする。この設定における随伴問題の解は、 $v_0 = u, v_1 = 0$ となる。このとき位相最適化問題は、次式を満たす θ^* を求める問題となる。

$$\theta^* = \arg \min \{f_0(\theta, u) | f_1(\theta) \leq 0\}.$$

H1 勾配法は、未定乗数法と逐次 2 次近似法を基礎とした方法である。位相最適化問題に対するアルゴリズムは、次の通りである [1]:

H1 勾配法アルゴリズム

- (i) $l = 0$. θ_0 を与える。
- (ii) θ_l に対する主問題 (1) を解く。
- (iii) 主問題の解により勾配 $g_{i,l}$ ($i = 0, 1$) を求める
- (iv) 次の問題の解 $\varphi_{i,l} \in H^1(D)$ ($i = 0, 1$) を求める:
 $\forall \psi \in H^1(D)$ に対して、

$$\int_D (\nabla \varphi_{i,l} \cdot \nabla \psi + c \varphi_{i,l} \psi) dx = -g_{i,l}(\psi)$$

ここで、 c は与えられた定数である。

- (v) 未定乗数 λ を求める。
- (vi) $\varphi_l = \varphi_{0,l} + \lambda \varphi_{1,l}$ とし、設計変数を更新する:

$$\theta_{l+1} = \theta_l + \varepsilon \varphi_l$$

- (vii) 収束条件を満たせば終了。満たさない場合は $l = l + 1$ として (2) へ戻る。

3 パラメータ選択基準

パラメータ選択基準を考察するため、数値実験を実施する。

$D = (0, 1) \times (0, 1)$, $\Gamma_D = \partial D$, $\Gamma_N = \emptyset$ とする。また $b = (x_1, x_2) = 2(x_1^2 + x_2^2 - (x_1 + x_2))$, $u_D = 0$ とする。数値実験は、FreeFEM++ バージョン 4.6[2] を用いて実施する。

c の値を変化させて数値実験を行い、最終ステップでのコスト関数値と制約関数の絶対値の関係をグラフ化した結果は、次の図の通りである。

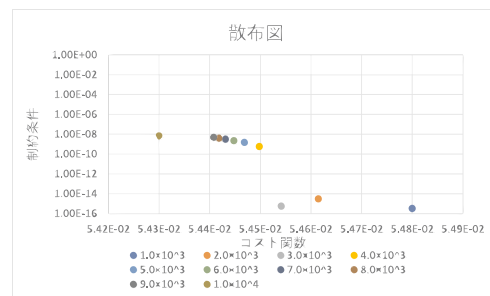


図 1 散布図 ($c = 10^3 \sim 10^4$)

コスト関数および制約関数の定義から、コスト関数を最小にし、さらに制約関数値を 0 にするものが、数値的に安定かつ高精度な同定結果と考えることができる。しかし図 1 より、コスト関数を最小かつ制約関数を最大にする c は存在しないことが明らかとなった。一方、コスト関数と制約条件をバランスがとれるパラメータ、すなわち c を変化したときに描かれる曲線の曲率最大となる値が存在することが示唆された。 $c = 3.0 \times 10^3$ における密度関数 ϕ は、次の図のとおりである。

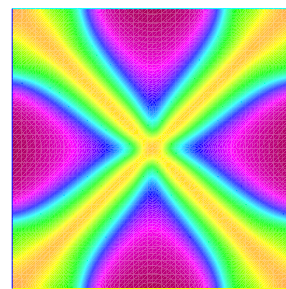


図 2 $\phi(\theta)$ ($c = 3.0 \times 10^3$)

上図より、曲率最大点をとる c を用いることで、数値的に安定かつ一定精度の同定結果を得られる可能性が示唆された。 c を自動的に導出するアルゴリズムの開発、弾性問題など実用に近い問題での提案基準有効性の検証が、今後の課題である。

参考文献

- [1] 畔上秀幸, 形状最適化問題, 森北出版, 2016.
- [2] F. Hecht, New development in FreeFem++, J. Numer. Math., 20, pp. 251–266, 2012.