# $H^1$ 型解法におけるパラメータ選択基準の研究

情報科学科　横井 啓輔　　　指導教員：代田 健二

## 1　はじめに

本研究の目的は，スカラー波動方程式の係数同定問題に対する安定な数値解法を開発することである．代田はスカラー波動方程式の係数同定逆問題に対する数値解法を提案し，数値的に安定かつ一定精度の結果を得ることを数値実験により示した [1]．一方，安定な結果を得るためには，パラメータ選択が重要であることも明らかにしている．そこで本研究では，探索方向のパラメータ $\alpha$ の選択基準について検討する．

本研究で対象とするのは，次のスカラー波動方程式の初期値境界値問題である．

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla\cdot(K(\boldsymbol{x})\nabla u) = f & \text{in } \Omega\times(0,T)\,, \\
u(\cdot,0) = u_0,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(\cdot,0) = v_0 & \text{in } \Omega\,, \\
u = g & \text{on } \Omega\times(0,T)\,.
\end{cases}
$$

$\Omega\subset\mathbb{R}^n$ $(n=2,3)$ は区分的に滑らかな境界 $\partial\Omega$ をもつ有界かつ凸な領域とし，$T$ は与えられた観測時間の長さである．また，$f\in L^2(\Omega\times(0,T))$, $g\in H^1((0,T);H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$, $u_0\in H^1(\Omega)$, $v_0\in L^2(\Omega)$ は与えられた関数とし，係数関数 $K\in L^\infty(\Omega)$ は，$0<C_1\le K(\boldsymbol{x})\le C_2$, $\forall\boldsymbol{x}\in\Omega$ を満たすものとする．ここで，$C_1, C_2$ は与えられた正定数である．$\omega\subseteq\Omega$ を与えられた部分領域とし，内部観測 $\overline{u}\in H^1((0,T);H^1(\omega))$ が与えられているとする．このとき，次の内部観測による係数同定問題を考察する．

**係数同定問題**

内部観測 $\overline{u}$ より係数関数 $K(\boldsymbol{x})$ を同定せよ．

係数関数を同定する方法として，$H^1$ 勾配法を採用する．内部観測データを用いた汎関数を導入し，汎関数の最小化関数を同定することで係数関数の同定を試みる．最小化関数の同定には勾配法を採用し，探索方向を求めるのに $H^1$ 勾配法のアイディアを用いる．$H^1$ 勾配法におけるパラメータ選択方法を汎関数値減少の観点から導出し，数値実験によりその有効性を検証する．

## 2　$H^1$ 勾配法による同定アルゴリズム

本研究では $L^\infty$ 空間ではなく $H^1(\Omega)$ に係数関数が属することを仮定する．$\phi\in C^1(\mathbb{R})$ を，$0\le\phi(y)\le 1$, $\forall y\in\mathbb{R}$ を満たす関数とする．設計変数関数 $\theta\in H^1(\Omega)$ を用いて，密度型係数関数を導入する．

$$K_\theta(\boldsymbol{x}) := (C_2 - C_1)\phi(\theta(\boldsymbol{x})) + C_1\,.$$

ここで $K_\theta\in H^1(\Omega)$ であり，制約条件を満たしている．この密度型係数関数を用いて，元の係数同定問題を次のとおりに密度型へと変更する．

**密度型係数同定問題**

内部観測 $\overline{u}$ より，設計変数関数 $\theta$ を同定せよ．

密度型問題を解くため，次の汎関数を導入する．

$$J(\theta) = \widetilde{J}(K_\theta) = \int_0^T\int_\omega \frac{|u[K_\theta]-\overline{u}|^2}{\|\overline{u}\|^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\,.$$

ここで，$\|\overline{u}\| := \left(\displaystyle\int_0^T\int_\omega |\overline{u}|^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$ である．汎関数 $J$ の最小化関数により，設計変数を同定する．最小化関数を同定する方法としては，抽象勾配法を用いるため，汎関数 $J$ の導関数が必要となる．導関数は，次のとおりに求めることができる．

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}\widetilde{J}}{\mathrm{d}K}\circ\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\theta}\,.$$

ここで，

$$\frac{d\widetilde{J}}{\mathrm{d}K}(\widetilde{K}) = -\int_0^T \nabla u[\widetilde{K}]\cdot\nabla w\,\mathrm{d}t$$

であり，$w\in H^1((0,T);H^1(\Omega))$ は随伴問題の解である．

未知の設計変数を，次の反復プロセスにより同定する．

$$\theta_{\ell+1} = \theta_\ell + \epsilon_\ell\frac{s_\ell}{\|s_\ell\|_\infty}\ (\ell = 0,1,2,\ldots\ldots)\,.$$

ここで $s_\ell$ は探索方向，$\epsilon_\ell>0$ は適切に与えられた探索の幅である．探索方向は，次の弱形式の方程式を解くことで得る．

$$\alpha\,(\nabla s_\ell,\nabla v)_{L^2} + (s_\ell, v)_{L^2} = -\left\langle\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}\theta}(\theta_\ell),\, v\right\rangle,\ \forall v\in H^1(\Omega)\,.$$

ここで，$\alpha>0$ は与えられた定数である．

## 3　パラメータ選択法

昨年度，下村 [2] は汎関数の減少率と同定結果の関連性を検討し，パラメータ選択法への可能性を示唆した．汎関数値は，確率的な誤差を含むデータと同定係数関数を用いた波動方程式の解との予測誤差と関連があるため，汎関数値を最小にする $\alpha$ を求める方法が同定結果にも有効であると考えられる．そこで本研究では，1 ステップ目において汎関数を最小にする $\alpha$ を求め，2 ステップ目以降，その $\alpha$ を用いる選択法を用いる．

数値実験により，その選択法の有効性を検証する．$\Omega = (0,1)\times(0,1)$ とし，真の係数関数は中心 $(0.5, 0.5)$ で半径 1/7 の円内では次の値をとり，それ以外では 1 をとるとする．

$$K(x,y) = \cos(7\pi\sqrt{(x-0.5)^2+(y-0.5)^2}) + 2\,.$$

スカラー波動方程式に対して真の解 $u(x,y,t) = \sin\pi(x+2y-t)$ を仮定し，Dirichlet 条件，ソース項関数を構成する．$T=1.75$, $\omega=\Omega$ とし，観測データに 1.0 % の誤差を加え，$C_1=0.95$, $C_2=3.05$, $\theta_0\equiv -1.0$ とする．ここで二分法により 1 ステップ目の汎関数値を最小にする $\alpha$ を求めた結果，$\alpha = 2.15\times10^{-1}$ を得た．求めた $\alpha$ とその他の $\alpha$ での最終的な汎関数値の比較を表 1 に示す．実験結果より，本手法が同定結果にも有効であることが示唆された．今後は，別の手法での $\alpha$ の探索を検討する．

| $\alpha$ | $1.0\times10^{-2}$ | $1.0\times10^{-1}$ | $2.15\times10^{-1}$ | $1.0\times10^{0}$ |
|---|---|---|---|---|
| 汎関数値 | $5.03\times10^{-3}$ | $4.12\times10^{-3}$ | $1.11\times10^{-3}$ | $5.28\times10^{-3}$ |

表 1　汎関数値の比較

## 参考文献

[1] 代田健二, スカラー波動方程式の係数同定問題に対する H1 勾配法, 第 23 回日本計算工学会講演論文集, G-08-05, 2018.

[2] 下村凌生，$H^1$ 型解法における適切なパラメータ選択基準の研究，令和元年度愛知県立大学情報科学部卒業論文，2019.