

令和3年度 愛知県立大学大学院情報科学研究科

博士論文

量子通信及び量子計測システムにおける 雑音解析及び最適受信機に関する研究

愛知県立大学大学院情報科学研究科情報科学専攻

王天澄

2022年3月

© Tiancheng Wang 2022

All Rights Reserved.

目次

第1章	序論	10
第2章	量子情報理論の基礎	16
2.1	ヒルベルト空間	16
2.1.1	ディラック記法	17
2.1.2	内積と外積	17
2.1.3	テンソル積	18
2.1.4	正規直交基底	18
2.2	ヒルベルト空間における作用素	19
2.2.1	恒等作用素	19
2.2.2	エルミート作用素	20
2.2.3	ユニタリ作用素	20
2.2.4	トレース	20
2.3	量子状態	21
2.3.1	光子数確定状態	22
2.3.2	コヒーレント状態	22
2.3.3	ベル状態	23
2.3.4	2モードのガウス状態	24
2.3.5	擬似ベル状態	25
第3章	量子通信の基礎	26
3.1	量子通信システム	26
3.2	送受信量子状態信号	27
3.3	BPSK 量子状態信号に対する量子最適測定	28
3.4	MPSK 量子状態信号に対する量子最適測定	29

3.5	信号光に対する古典最適測定	31
3.5.1	ホモダイン測定	32
3.5.2	ヘテロダイン測定	32
第4章	量子レーダの基礎	34
4.1	量子レーダシステム	34
4.2	受信量子状態の表現	35
4.2.1	Kraus 表現	35
4.2.2	Kraus 表現によるベル状態	36
4.2.3	Kraus 表現による2モードのガウス状態	36
4.2.4	Stinespring 表現による擬似ベル状態	37
4.3	受信量子状態に対する量子最適測定	37
4.4	レーザーレーダ	38
第5章	位相雑音環境下における量子受信機の誤り率特性とその設計	40
5.1	はじめに	40
5.2	位相雑音環境下の誤り率特性	43
5.3	複雑な位相雑音環境下の量子受信機	45
5.3.1	誤り率特性	46
5.3.2	評価指標	49
5.4	ロバストな量子受信機	50
5.4.1	ミニマックス戦略とロバスト性	51
5.4.2	ケースA: 任意の量子受信機が利用可能な場合	51
5.4.3	ケースB: 利用可能な量子受信機が限られている場合	52
5.4.4	ケースC: 確率的に量子受信機を切り替える場合	53
5.4.5	結果	54
5.5	おわりに	58
第6章	減衰環境における量子イルミネーションの誤り率	60
6.1	はじめに	60
6.2	量子イルミネーションの誤り率解析解の導出	62

6.2.1	ベル状態を用いる場合の誤り率	62
6.2.2	擬似ベル状態を用いる場合の誤り率の導出	63
6.3	量子イルミネーションの誤り率特性	70
6.3.1	無減衰の場合	71
6.3.2	減衰がある場合	73
6.4	おわりに	77
第7章	結論	80
	謝辞	84
	参考文献	86
	公表論文	94
	受賞	98

目次

1.1	本論文のアウトライン	15
4.1	量子イルミネーションのモデル	34
4.2	レーザーレーダのモデル	38
5.1	位相雑音が生じる場合のBPSK信号に対するホモダイン受信機と量子最適受信機による誤り率	44
5.2	位相雑音が生じる場合の3PSK信号に対するヘテロダイン受信機と量子最適受信機による誤り率	45
5.3	BPSK信号に対するホモダイン受信機と σ_2^2 に対して最適な量子受信機による誤り率. 平均光子数 $ \alpha ^2 = 1$ の場合	46
5.4	3PSK信号に対するヘテロダイン受信機と σ_2^2 に対して最適な量子受信機による誤り率. 平均光子数 $ \alpha ^2 = 1$ の場合	47
5.5	BPSK信号に対するホモダイン受信機と σ_2^2 に対して最適な量子受信機による誤り率. 平均光子数 $ \alpha ^2 = 3$ の場合	48
5.6	図5.3における誤り率に関する評価指標 S のグラフ	50
5.7	BPSK信号を受信する場合の R に対して最適な量子受信機を用いたロバスト性	54
5.8	3PSK信号を受信する場合の R に対して最適な量子受信機を用いたロバスト性	55
5.9	ケースA, B, Cに対する量子受信機設計のイメージ図	56
6.1	透過率 η を変化させたときの誤り率. 平均光子数が0.5の場合	73
6.2	平均光子数を0.5から5まで変化させたときの誤り率. 透過率 η をそれぞれ0.1, 0.5, 1として固定した場合	74

6.3	図6.2における誤り率の大きいところの詳細	75
6.4	平均光子数を0.5から50まで変化させたときの誤り率. 透過率 η をそれぞれ0.1, 0.5, 1として固定した場合	77

表目次

5.1	位相雑音量が非常に大きい場合の BPSK 信号に対するホモダイン受信機と量子最適受信機による誤り率及びその差	44
5.2	位相雑音量が非常に大きい場合の 3PSK 信号に対するヘテロダイン受信機と量子最適受信機による誤り率及びその差	45

第1章 序論

現代社会において欠かせない存在となっているコンピュータの発展を振り返ると、その演算速度や記憶容量はほぼムーアの法則に従っており、18ヶ月ごとに2倍程度に増加している。しかし、コンピュータの集積回路の集積密度を無限に大きくすることができないことに加え、素子が原子レベルまで微細化されると、古典力学に基づいたこれまでの基礎理論が破綻してしまう。このため、ムーアの法則は必ず限界がくる。同じように物理的限界は通信分野にも存在する。例えば、古典情報理論では、通信路に記憶がないとき、符号長を伸ばすとパルスあたりの伝送情報量は増えるところか一般的に減ってしまう。特に、 C_n を符号長 n の通信路容量¹として、量子最適受信機を用いて従来通りにパルス（レター状態）を個別に測定して復号する戦略では、符号長無限の極限での通信路容量は $C^{(C)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_n}{n} = C_1$ となり、やはり $n = 1$ の際の C_1 を超えることができない。 $C^{(C)}$ はしばしばシャノン限界と呼ばれている [1]。一方で、レター状態からなる符号語状態に対して量子一括測定を用いて復号する戦略では、符号長を伸ばすことで、伸ばした以上に伝送情報量を増やすことができる [2, 3]。この場合、符号長無限の極限での通信路容量は $C = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_n}{n} (\geq C_1 = C^{(C)})$ となり、量子通信路容量またはホレボー限界と呼ばれている [1]。

以上より、古典力学が支配的になるマクロの世界において、電気や光の波（電磁波）としての性質を利用し成り立っている現在の情報技術は、ムーアの法則の限界やシャノン限界をはじめ、物理的な限界を迎えられられる。その限界を打破するために、ミクロの世界で支配的な物理原理となる量子力学を利用した次世代情報技術、つまり量子情報技術が重要視されている。例として、ムーアの法則の限界を突破しスーパーコンピュータの能

¹この通信路容量 C_n とは、通信路を n 回使用した際の最大伝送情報量のことをいう。

力を凌駕する量子コンピュータ, シヤノン限界を突破する超高速通信の量子通信, 従来技術を凌駕する感度や精度を実現する量子計測など, 現在, 世界中で開発及び研究競争が激化している.

本論文では, 古典的な検出限界を上回ることができる量子受信機の視点から出発し, 相手からの信号を受信する方式と, 自分が送信した信号を自分で受信する方式という大きく分けて二種類の受信方式を扱う. この二種類の受信方式はそれぞれ量子情報科学のサブ分野である, 量子通信と量子計測に対応している. 以下, 量子通信と量子計測の背景を紹介する.

量子通信

デジタル社会では, 通信の高速・大容量化に対するニーズがますます高まり, 極めて高い周波数の電磁波をより効率的に利用することが, 今後は必須となると考えられる. 歴史的には, 1960年代のレーザーの発明により, マイクロ波から光へと一気に1万倍以上の高周波化が図られた. しかしながら, 技術的困難等もあり, 光通信方式は, 懐中電灯をオンオフするような素朴な方式である強度変調直接検波 (intensity-modulation direct detection, IMDD) 方式が40年にわたって利用されていた. 21世紀に入ってから技術の進歩により, 漸く光の波動性を最大限に利用するデジタルコヒーレント光通信方式が実用化の域まで来た. 今後, これ以上に光を効率的に利用するためには, さらに, 光の本質である量子性に目を向けねばならない. すなわち, 光の量子性に起因する量子雑音 [4] に対処しなければ, 光通信の潜在力を完全に引き出すことはできない. この「量子雑音に対処」するための方式が量子通信方式であり, レーザーの発明に相前後して開始されている [5, 6, 7, 8]. 量子通信の研究は, コヒーレント光通信の不遇の時代も継続され, その間, 量子通信路符号化定理の証明 [9, 10, 11], 量子暗号の研究開発 [12] など, 着実に発展してきた. なお, 量子通信の分野では, IMDDやコヒーレント光通信方式は, しばしば古典通信と呼ばれ, 本論文でもこの用語を使用する.

量子計測

量子計測では、量子プロトコルにおける重要なリソースであるエンタングルメント（量子もつれともいう）[13]が用いられる²。エンタングルメントとは複数の量子系の非局所的な相関のことであり、この相関は複数の量子系の距離がどれだけ離れていても保たれる。このような相関を持っている量子状態をエンタングルド状態という。エンタングルメントは量子力学の最も特徴的な概念として現在よく知られているが、実は1935年にアインシュタインらによって初めて提唱された以降、理論的な議論に長く留まっていた。最終的に、実験物理学者のAspectらによる1980年代の実験[16]によって、エンタングルメントの存在が実験的に検証された。それをきっかけとして、エンタングルメントは量子情報処理において重要なため量子情報科学の研究者から大きく注目された。エンタングルメントを応用したプロトコルの例としては、1990年代にEkertによって提案された量子暗号プロトコルE91[17]、Bennettらによって提案された量子超稠密符号化[18]、量子テレポーテーション[19]などが有名である。さらに、エンタングルメントの計測技術への応用として、1995年にPittmanらによって提案された対象物の輪郭をとらえる量子ゴーストイメージング[20]、2008年にLloydによって提案された量子イルミネーション[21]、2011年にPirandolaによって提案されたメモリ内の情報を読み出す量子リーディング[22]などが挙げられる。これらの計測技術はしばしば、量子計測または量子センシングと呼ばれている。そのうち、量子イルミネーションは反射光の有無によってターゲットの有無を確かめるものであり、量子レーダとも呼ばれている。特に、量子イルミネーションは量子計測技術の基本形となるため、本論文で代表例として取り扱われる。

量子通信では、前述したとおり、理想的な環境における基礎理論の構築

²単一モードスクイズド状態を利用した量子計測プロトコルもある (e.g. [14, 15]) が、本論文ではエンタングルド状態を利用した量子計測プロトコルに着目する。

などは21世紀に入る前にほぼ完成できている。2000年頃以降、単純な減衰や熱雑音などに代表されるガウス雑音に対する解析が進められ、インパクトのある論文が多数出されている (e.g. [23, 24])。2010年頃以降、地上-衛星通信 (e.g. [25, 26]) をはじめ量子通信の形態が多様になったことに伴い、フェージング現象などによって引き起こされる非ガウス雑音が重要視されている。代表的な非ガウス雑音として、信号エネルギーの不規則変動や位相の不規則変動などが挙げられ、それらに対する解析が相次いで行われている (e.g. [27, 28])。このように、量子通信が日々現実近づいてくる中で、次の10年のスパンでは多岐にわたる雑音が発生する、より現実的な環境に対応できる量子受信機の実現が喫緊の課題となると考えられる。以上を踏まえて、本論文の一つ目の目標は以下の通りである。

本論文の目標1

グローバル量子通信ネットワークの構築に向けて、超長距離通信路において避けられない位相の不規則変動、すなわち位相雑音に焦点をあて、位相雑音の効果を解析し、量子受信機の性能に対する影響を明らかにする。さらに、位相雑音に対しロバストな量子受信機的设计方針を示す。

量子計測では、前述のとおり、手法の提案が2010年頃までに行われ、実現化に向けて基本的な不完全要因である単純な減衰や熱雑音の効果がすでに明らかにされている。近年、量子計測の実験に拍車がかかっている (e.g. [15, 29])。量子計測への期待は、重力波検出 [14, 15] から悪天候時や夜間の自動運転のための車載レーダ [30] まで、現在、極限まで高まっているように見える。しかし、量子計測では量子Chernoff限界 [31] などを用いた解析研究が多い。これは、対象物に同じパルスを無数に当てた場合の最適測定のパフォーマンスの近似評価を行うものといえる。量子計測への応用をコストにこだわらないような極限技術に限定すれば、これら先行研究で十分である。ところが、近年、車載レーダをはじめとし量子計測技術の民生利用に対するニーズも増えている。自動運転をイメージすればわかるが、量子Chernoff限界より誤り率のような瞬時的な性能評価が必要である。これはむしろ、量子通

信システムの性能評価に近いといえる。つまり、量子通信における受信機が、実は量子状態を高精度に計測する量子計測で使われる測定器となりうる。このように、民生利用にも量子計測技術に対する期待が高まっており、量子受信機を用いた量子計測システムに対する瞬時的な性能評価が喫緊の課題となると考えられる。以上を踏まえて、本論文の二つ目の目標は以下の通りである。

本論文の目標2

量子計測の民生利用に向けて、その基本形となる量子イルミネーション、すなわち量子レーダを取り扱い、伝送路において基本的な不完全要因となる減衰に焦点をあて、減衰の効果を解析し、量子受信機を用いた量子レーダシステムの性能に対する影響を明らかにする。

さて、本論文の各章の説明は以下の通りである。

- ◇ 第2章：量子情報理論の基礎的数学概念を紹介する。特に本論文で使われているヒルベルト空間、作用素、量子状態に関する概念を取り上げる。
- ◇ 第3章：目標1に対応する量子通信システムの基礎や数学的記述を紹介する。本研究で使われている基本設定や位相雑音の記述などについても述べる。また、量子受信機と比較するための古典受信機を紹介する。
- ◇ 第4章：目標2に対応する量子レーダシステムの基礎や数学的記述を紹介する。本研究で使われている基本設定や単純減衰の記述などについても述べる。また、量子レーダに対し従来技術と位置づけられるレーザーレーダを紹介する。
- ◇ 第5章：第3章の量子通信システムを踏まえて位相雑音の効果を解析し、量子受信機の性能に対する影響を明らかにする。さらに、位相雑音に対しロバストな量子受信機の設計方針を示す。

- ◇ 第6章：第4章の量子レーダシステムを踏まえて減衰の効果解析し、量子受信機を用いた量子レーダシステムの性能に対する影響を明らかにする。特に、エンタングルド状態の一種である擬似ベル状態を用いた量子レーダにおいて、減衰がある場合の誤り率の解析解を導出する。
- ◇ 第7章：本論文のまとめを示す。

本論文のアウトラインは図1.1のとおりである。

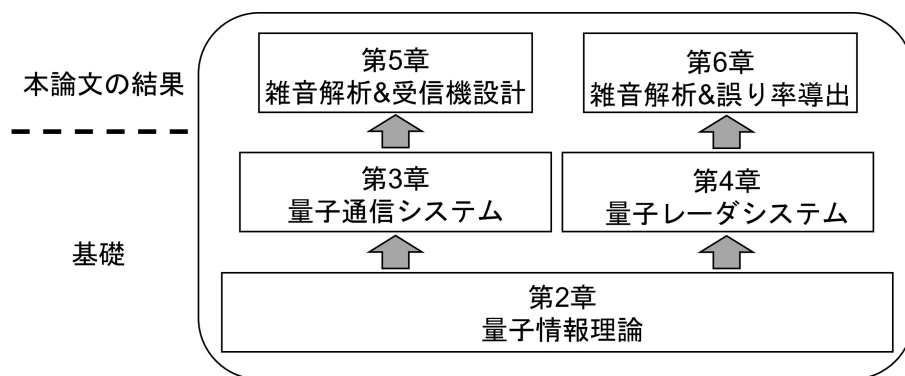


図 1.1: 本論文のアウトライン

第2章 量子情報理論の基礎

量子情報理論は、古典物理法則に従い成り立っていた情報理論と量子力学を統合した理論体系である。現代社会において、高周波数の電磁波を用いた高速通信をさらに高速化するにあたり、量子通信や信号処理の限界及び特性を解明し、実現化するための方針を与えるためにその基盤である量子情報理論が不可欠である。同様に、量子効果を活用して超高感度測定を行う量子計測においても量子情報理論が理論的基盤となる。本章では、量子情報理論の基礎的数学概念を簡単に紹介する。

2.1 ヒルベルト空間

量子力学分野における量子状態を数学的に表すには、ヒルベルト空間と呼ばれる抽象空間が用いられる。

V を \mathbb{K} 上のベクトル空間とし、任意の $u, v \in V$ に対し、二項演算 (u, v) が次の条件を満たすとき、この演算 (u, v) は内積と呼ばれる。

1. 任意の $u, u', v \in V$ に対し、 $(u + u', v) = (u, v) + (u', v)$ である。
2. 任意の $u, v \in V$ かつ $a \in \mathbb{K}$ に対し、 $(au, v) = a(u, v)$ である。
3. 任意の $u, v \in V$ に対し、 $(u, v) = \overline{(v, u)}$ である。
4. 任意の $u \in V$ に対し、 $(u, u) \geq 0$ 、 $(u, u) = 0$ ならば $u = 0$ である。

ここで、 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ の場合は複素内積空間、 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ の場合は実内積空間とよばれる。ただし、実内積空間の場合、条件3の $(u, v) = \overline{(v, u)}$ を $(u, v) = (v, u)$ に書き換える。このように内積が定義されたベクトル空間を内積空間という。内積空間が完備性を持つとき、ヒルベルト空間と呼ばれる。ただし、完

備性とは、空間内の点からなる点列がコーシーの収束条件を満たせば収束し、収束先が空間内に存在しなければならないことである。

2.1.1 ディラック記法

n 次元のヒルベルト空間を \mathcal{H} とし、量子力学分野における量子状態を記述するためディラックの記法を用い、列ベクトルはケットベクトル $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ とよび、行ベクトルはブラベクトル $\langle\psi| \in \mathcal{H}$ という。 $|\psi\rangle$ と $\langle\psi|$ はそれぞれ次のような列ベクトルと行ベクトルで表される。

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

$$\langle\psi| = (\psi_1^* \ \psi_2^* \ \cdots \ \psi_n^*) \quad (2.2)$$

ただし、 $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ は任意の複素数であり、 $*$ は複素共役を表す。そして、転置をしてから各要素の複素共役をとるエルミート共役が定義される。エルミート共役をとることを表す \dagger 記号を用い、 $|\psi\rangle$ と $\langle\psi|$ は次式の関係を持つ。

$$\langle\psi| = |\psi\rangle^\dagger \quad (2.3)$$

2.1.2 内積と外積

ディラックの記法を用い、ヒルベルト空間における二つのベクトル $|\psi\rangle, |\phi\rangle$ の内積は $\langle\psi|\phi\rangle$ と表され、以下のように計算できる。

$$\langle\psi|\phi\rangle = (\psi_1^* \ \psi_2^* \ \cdots \ \psi_n^*) \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix} = \psi_1^* \phi_1 + \psi_2^* \phi_2 + \cdots + \psi_n^* \phi_n \quad (2.4)$$

ここで、この内積が0となる時、つまり

$$\langle\psi|\phi\rangle = 0 \quad (2.5)$$

の場合，この二つのベクトルは互いに直交していると考えられる．また，ノルムとはベクトルの自分自身との内積の平方根をとるものであり，つぎのように表せる．

$$\|\psi\| = \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle} \quad (2.6)$$

一方，ヒルベルト空間における二つのベクトル $|\psi\rangle, |\phi\rangle$ の外積は $|\psi\rangle\langle\phi|$ と表され，以下のように計算できる．

$$|\psi\rangle\langle\phi| = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1^* & \phi_2^* & \cdots & \phi_n^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1\phi_1^* & \psi_1\phi_2^* & \cdots & \psi_1\phi_n^* \\ \psi_2\phi_1^* & \psi_2\phi_2^* & \cdots & \psi_2\phi_n^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_n\phi_1^* & \psi_n\phi_2^* & \cdots & \psi_n\phi_n^* \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

2.1.3 テンソル積

ヒルベルト空間における二つのベクトル $|\psi\rangle, |\phi\rangle$ のテンソル積は $|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle$ または $|\psi\rangle|\phi\rangle$ と表され，以下のように計算できる．

$$|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle = |\psi\rangle|\phi\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1\phi_1 \\ \vdots \\ \psi_1\phi_n \\ \psi_2\phi_1 \\ \vdots \\ \psi_2\phi_n \\ \vdots \\ \psi_n\phi_1 \\ \vdots \\ \psi_n\phi_n \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

2.1.4 正規直交基底

ヒルベルト空間におけるベクトル集合 $\{|\psi_i\rangle\}$ が互いに直交し， $m \neq n$ で内積 $\langle\psi_m|\psi_n\rangle$ が0の場合， $\{|\psi_i\rangle\}$ を直交系という．また，直交系 $\{|\phi_i\rangle\}$ について，そのノルム $\|\phi_i\|$ が1となる場合，つまり

$$\langle\phi_m|\phi_n\rangle = \delta_{mn} \quad (2.9)$$

となるとき、 $\{|\phi_i\rangle\}$ を正規直交系と呼ぶ。ただし、 δ_{mn} はクロネッカーのデルタである。ここで、 $\{|\phi_i\rangle\}$ と直交するベクトルが0ベクトルのみの場合、 $\{|\phi_i\rangle\}$ は正規直交基底となる。

2.2 ヒルベルト空間における作用素

ヒルベルト空間における線形変換を作用素と呼ぶ。ヒルベルト空間 \mathcal{H}_1 の任意のベクトル $|\psi\rangle$ と $|\phi\rangle$ に対し、 \mathcal{H}_1 からヒルベルト空間 \mathcal{H}_2 への写像 A が次の条件を満たせば、 A を線形作用素という。

$$A(\alpha|\psi\rangle + \beta|\phi\rangle) = \alpha A|\psi\rangle + \beta A|\phi\rangle \quad (2.10)$$

ただし、 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ である。なお、ヒルベルト空間における作用素には $\hat{}$ を付けることが多いため、本論文でもその書き方を踏襲するが、単なる行列には $\hat{}$ を付けず区別する。さて、線形作用素 \hat{A} のエルミート共役、ブラベクトルとケットベクトルの関係は以下のように書ける。

$$\langle\psi|\hat{A}^\dagger = (\hat{A}|\psi\rangle)^\dagger \quad (2.11)$$

次に、量子情報理論における重要な作用素を三つ紹介する。

2.2.1 恒等作用素

任意のベクトル $|\psi\rangle$ に対し、

$$\hat{I}|\psi\rangle = |\psi\rangle \quad (2.12)$$

が成り立つとき、 \hat{I} を恒等作用素という。また、ヒルベルト空間 \mathcal{H} における任意の正規直交基底 $\{|\phi_i\rangle\}$ を用いて恒等作用素 \hat{I} を次のように書くことができる。

$$\hat{I} = \sum_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i| \quad (2.13)$$

2.2.2 エルミート作用素

作用素が自分自身のエルミート共役に等しい場合,

$$\hat{A} = \hat{A}^\dagger \quad (2.14)$$

となり, \hat{A} をエルミート作用素という. エルミート作用素には, その固有値が実数となる性質がある.

2.2.3 ユニタリ作用素

量子力学的時間発展はユニタリ作用素により表現される. \hat{U} をユニタリ作用素とすると, 以下の性質をもつ.

$$\hat{U}\hat{U}^\dagger = \hat{U}^\dagger\hat{U} = \hat{I} \quad (2.15)$$

また,

$$|\psi_i\rangle = \hat{U}|\psi_j\rangle \quad (2.16)$$

$$\langle\phi_i| = \langle\phi_j|\hat{U}^\dagger \quad (2.17)$$

とした場合,

$$\langle\phi_i|\psi_i\rangle = \langle\phi_j|\hat{U}^\dagger\hat{U}|\psi_j\rangle = \langle\phi_j|\psi_j\rangle \quad (2.18)$$

となる.

2.2.4 トレース

正方行列の対角成分の総和はトレースと呼ばれ, Tr と書かれる. ヒルベルト空間 \mathcal{H} における線形作用素 \hat{A} のトレースは, 正規直交基底 $\{|\phi_i\rangle\}$ を用いて次のように表す.

$$\text{Tr } \hat{A} = \sum_i \langle\phi_i|\hat{A}|\phi_i\rangle \quad (2.19)$$

$\{|\psi_i\rangle\}$ を別の正規直交基底とする．以下に示すように，作用素のトレースは正規直交系の取り方によらない．

$$\begin{aligned}
 \sum_i \langle \phi_i | \hat{A} | \phi_i \rangle &= \sum_i \langle \phi_i | \hat{I} \hat{A} | \phi_i \rangle \\
 &= \sum_{i,j} \langle \phi_i | \psi_j \rangle \langle \psi_j | \hat{A} | \phi_i \rangle \\
 &= \sum_{i,j} \langle \psi_j | \hat{A} | \phi_i \rangle \langle \phi_i | \psi_j \rangle \\
 &= \sum_j \langle \psi_j | \hat{A} | \psi_j \rangle
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

また，線形作用素 \hat{A}, \hat{B} に対して，トレースは次のような性質をもつ．

1. 線形性： $\text{Tr}(\hat{A} + \hat{B}) = \text{Tr} \hat{A} + \text{Tr} \hat{B}$ を満たす．また， $\text{Tr}(c\hat{A}) = c \text{Tr} \hat{A}$ を満たす．ただし， c はスカラーである．
2. 巡回性： $\text{Tr}(\hat{A}\hat{B}) = \text{Tr}(\hat{B}\hat{A})$ を満たす．
3. $(\text{Tr} \hat{A})^* = \text{Tr} \hat{A}^\dagger$ を満たす．

2.3 量子状態

量子系の状態は，密度作用素で表現される量子状態 $\hat{\rho}$ により記述される．密度作用素は量子系を表すヒルベルト空間上の非負のエルミート作用素であり，以下の性質を満たす．

$$\hat{\rho} \geq 0, \quad \text{Tr} \hat{\rho} = 1 \tag{2.21}$$

特に，密度作用素 $\hat{\rho}$ の rank が 1 となる場合，それに対応する状態は純粋状態 $\hat{\rho}^{\text{pure}}$ とよばれる．それに対し，混合状態は純粋状態の確率的混合によって表現される．純粋状態と混合状態はヒルベルト空間 \mathcal{H} のベクトル $|\psi\rangle$ を用いて次のように表される．

$$\hat{\rho}^{\text{pure}} = |\psi\rangle\langle\psi| \tag{2.22}$$

$$\hat{\rho}^{\text{mix}} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \tag{2.23}$$

ただし、 $\hat{\rho}^{\text{mix}}$ において i 番目の状態が確率 p_i で混合するとし、 $0 \leq p_i \leq 1$ 、 $\sum_i p_i = 1$ である。また、 $|\psi\rangle$ を量子状態と呼ぶなら、厳密には呼び方を区別し、 $\hat{\rho}^{\text{pure}}$ と $\hat{\rho}^{\text{mix}}$ を量子状態の密度作用素と呼ぶべきだが、しばしば $\hat{\rho}^{\text{pure}}$ と $\hat{\rho}^{\text{mix}}$ も量子状態と呼ばれるようになったため、本論文でもその慣習を踏襲して量子状態と呼ぶことにする。

2.3.1 光子数確定状態

最も代表的な光の量子状態として光子数確定状態が挙げられる。光子数確定状態 $|n\rangle$ は光子数が n である状態を表しており、第 $n+1$ 成分が1でそれ以外の成分が0である無限次元の列ベクトルとして行列表現でき、以下のような正規直交基底を形成する。

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = \hat{I}, \quad \langle n|m\rangle = \delta_{mn} \quad (2.24)$$

ただし、 \hat{I} は恒等作用素、 δ_{mn} はクロネッカーのデルタである。

2.3.2 コヒーレント状態

コヒーレント状態は、最も基本的な光の量子状態として知られ、レーザー光で近似的に表現できるため非常に重要である。この状態は光子数確定状態 $|n\rangle$ を用いて以下のように表される。

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} |n\rangle \quad (2.25)$$

ただし、 α はコヒーレント状態の複素振幅である。通信・レーダシステムにおいては、通信・測定に際してどれだけのエネルギーが必要となるかが重要であるが、コヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ の平均光子数は $\langle n \rangle_{\text{Coh}} = |\alpha|^2$ である。また、エネルギー透過率 η に対応する減衰を受けたコヒーレント状態は、コヒーレント状態 $|\sqrt{\eta}\alpha\rangle$ となる。

コヒーレント状態の重要な性質として次式のように自身との内積が1となることが挙げられる.

$$\begin{aligned}
\langle \alpha | \alpha \rangle &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha^*)^m}{\sqrt{m!}} e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \langle m | \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} |n\rangle \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha^*)^n}{\sqrt{n!}} e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \langle n | n \rangle \\
&= e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(|\alpha|^2)^n}{n!} \\
&= e^{-|\alpha|^2} e^{|\alpha|^2} \\
&= 1
\end{aligned} \tag{2.26}$$

しかし, 異なるコヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ と $|\beta\rangle$ との内積は次式に示したように結果は0とならないため直交していない.

$$\begin{aligned}
\langle \alpha | \beta \rangle &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha^*)^m}{\sqrt{m!}} e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \langle m | \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n}{\sqrt{n!}} e^{-\frac{1}{2}|\beta|^2} |n\rangle \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha^*)^n}{\sqrt{n!}} e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \frac{\beta^n}{\sqrt{n!}} e^{-\frac{1}{2}|\beta|^2} \langle n | n \rangle \\
&= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2 - \frac{1}{2}|\beta|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha^* \beta)^n}{n!} \\
&= e^{\alpha^* \beta - \frac{1}{2}|\alpha|^2 - \frac{1}{2}|\beta|^2}
\end{aligned} \tag{2.27}$$

特に, α, β がともに実数である場合, $\langle \alpha | \beta \rangle$ の値は実数となる. また, 複素振幅の異なる M 個のコヒーレント状態を考える場合, このようなコヒーレント状態は線形独立であることが知られている (e.g. [8, 32]).

2.3.3 ベル状態

ベル状態 [13] は最も基本的なエンタングルド状態である. エンタングルメントを構成する二つの量子系 (ここでは光系) を文献 [21] に倣い, S (シグナル), A (アンシラ) と表す. ここで, 量子系として qubit 系, つまり量子系の次元が 2 の場合を扱い, 光子数 0 と 1 の光子数確定状態 $|0\rangle$ (i.e. 真空

状態) と $|1\rangle$ (i.e. 単一光子数状態) を用意する. ベル状態は, S と A の複合系 SA の量子状態として, 以下のように表される.

$$|\Psi^\pm\rangle_{SA} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_S|0\rangle_A \pm |1\rangle_S|1\rangle_A) \quad (2.28)$$

$$|\Phi^\pm\rangle_{SA} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_S|1\rangle_A \pm |1\rangle_S|0\rangle_A) \quad (2.29)$$

ただし, S 系の平均光子数は $\langle n \rangle_{\text{Bell}} = 0.5$ である. また, 4つのベル状態はいずれも 2次元系においてエンタングルメントが最大, すなわちエンタングルメント測度の値が 1 ebit となるため, 2次元系における最大エンタングルド状態とも呼ばれている. 本論文では $|\Phi^+\rangle_{SA}$ を取り扱う.

2.3.4 2モードのガウス状態

2モードのガウス状態は最も重要なエンタングルド状態の一つであり, 量子イルミネーション [33] や量子リーティング [22] プロトコルなどにおいて基本的な状態として多くの研究で議論されてきた. 本論文で取り扱う 2モードのガウス状態は, S と A の複合系 SA の量子状態として, 以下のように表される.

$$|\psi\rangle_{SA} = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{N_S^n}{(N_S + 1)^{n+1}}} |n\rangle_S |n\rangle_A \quad (2.30)$$

ただし, $\langle n \rangle_{\text{Gauss}} = N_S$ は S 系の平均光子数である. $|\psi\rangle_{SA}$ は実は 2モードのガウス状態の一種である 2モードスクイズド真空状態 [34] である. $|\psi\rangle_{SA}$ の注目すべき性質として, そのエンタングルメント測度の値

$$E_{\text{Gauss}} = (N_S + 1) \log_2(N_S + 1) - N_S \log_2 N_S \quad (2.31)$$

が 1 ebit を超えることが挙げられる. $|\psi\rangle_{SA}$ は無限次元系のエンタングルド状態であるため, エンタングルメント測度の値に次元に起因する上限はなく, 式 (2.31) より, 平均光子数を大きくすることでエンタングルメント測度の値をいくらでも大きくできることがわかる.

2.3.5 擬似ベル状態

擬似ベル状態 [35] は、エンタングルメント状態の一種であり、二つの非直交量子状態から構成されるにもかかわらず、最大エンタングルメント状態をもつものがある。本論文では、そのような非直交量子状態としてコヒーレント状態を用いる。振幅 α, β のコヒーレント状態をそれぞれ $|\alpha\rangle, |\beta\rangle$ とすると、擬似ベル状態は複合系 SA の量子状態として、以下のように表される。

$$|\Psi_1\rangle_{SA} = h_1 (|\alpha\rangle_S |\beta\rangle_A + |-\alpha\rangle_S |-\beta\rangle_A) \quad (2.32)$$

$$|\Psi_2\rangle_{SA} = h_2 (|\alpha\rangle_S |\beta\rangle_A - |-\alpha\rangle_S |-\beta\rangle_A) \quad (2.33)$$

$$|\Psi_3\rangle_{SA} = h_3 (|\alpha\rangle_S |-\beta\rangle_A + |-\alpha\rangle_S |\beta\rangle_A) \quad (2.34)$$

$$|\Psi_4\rangle_{SA} = h_4 (|\alpha\rangle_S |-\beta\rangle_A - |-\alpha\rangle_S |\beta\rangle_A) \quad (2.35)$$

ここで、 $\{h_i\}$ は規格化定数であり、以下の通りである。

$$h_1 = h_3 = \frac{1}{\sqrt{2(1 + \kappa_S \kappa_A)}} \quad (2.36)$$

$$h_2 = h_4 = \frac{1}{\sqrt{2(1 - \kappa_S \kappa_A)}} \quad (2.37)$$

$$\kappa_S = \langle \alpha | -\alpha \rangle = \langle -\alpha | \alpha \rangle = e^{-2|\alpha|^2} \quad (2.38)$$

$$\kappa_A = \langle \beta | -\beta \rangle = \langle -\beta | \beta \rangle = e^{-2|\beta|^2} \quad (2.39)$$

ただし、 α, β は非負の実数である。 $\alpha = \beta$ のとき、 $|\Psi_2\rangle_{SA}$ はエンタングルメントが最大となり、エンタングルメント測度の値は 1 ebit である。したがって、最大擬似ベル状態として、本論文では $\alpha = \beta$ のときの $|\Psi_2\rangle_{SA}$ を取り扱う。その S 系の平均光子数は $\langle n \rangle_{\text{Max}} = |\alpha|^2 \coth(2|\alpha|^2)$ であり、 $\alpha \rightarrow 0$ のときに $\langle n \rangle_{\text{Max}} \rightarrow 0.5$ のため、その最小平均光子数は 0.5 である。一方で、エンタングルメント測度の値が 1 ebit より小さい非最大擬似ベル状態として、本論文では $\alpha = \beta$ のときの $|\Psi_1\rangle_{SA}$ を取り扱う。その S 系の平均光子数は $\langle n \rangle_{\text{NonMax}} = |\alpha|^2 \tanh(2|\alpha|^2)$ であり、 $\alpha \rightarrow 0$ のときに $\langle n \rangle_{\text{NonMax}} \rightarrow 0$ のため、その最小平均光子数は 0 である。

第3章 量子通信の基礎

本章では、量子通信システムの数学的記述や古典最適測定について説明を行う。なお、送信信号は等確率で生起するものとする。

3.1 量子通信システム

写像 $\mathcal{L} : \mathcal{S}(\mathcal{H}_A) \rightarrow \mathcal{S}(\mathcal{H}_B)$ で表す量子通信路を通して、送信側から受信側へ古典情報を送るとする。ただし、 $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ はヒルベルト空間 \mathcal{H} 上の密度作用素の集合である。ここで、送信古典情報 x_i に対応する送信量子状態を $\hat{\rho}_i^{(\text{in})} (\in \mathcal{S}(\mathcal{H}_A))$ として、送信古典情報 x_i から受信量子状態 $\hat{\rho}_i^{(\text{out})} (\in \mathcal{S}(\mathcal{H}_B))$ への写像 $\Phi : x_i \rightarrow \Phi_{x_i} := \mathcal{L}(\hat{\rho}_i^{(\text{in})})$ は古典—量子通信路と呼ばれる [36]。

一方で、受信量子状態の集合 $\rho^{(\text{out})} := \{\hat{\rho}_i^{(\text{out})}\} (\subseteq \mathcal{S}(\mathcal{H}_B)) (i = 0, 1, \dots, M-1)$ 及びそれに対応する先験確率の集合 $\{\xi_i\} (\xi_i = \frac{1}{M})$ で構成されるアンサンブル \mathcal{E}_M を考える。信号検出の測定過程は、量子測定を記述する POVM (positive operator-valued measure) $\{\hat{\Pi}_j\} (=:\Pi)$ により表される。POVM は量子測定の数学的記述であるが、POVM 自体を量子測定または量子受信機と呼ぶことがあり、本研究でもその慣習を踏襲する。決定作用素 $\hat{\Pi}_j$ はヒルベルト空間上のエルミート作用素であり、 $\sum_j \hat{\Pi}_j = \hat{I}$ と $\hat{\Pi}_j \geq 0$ を満たす。ここで、 \hat{I} は恒等作用素である。古典情報 x_i に対応する量子状態 $\hat{\rho}_i^{(\text{out})}$ に対し、量子測定の結果、古典情報 x_j と決定される条件付き確率は、 $p(x_j|x_i) = \text{Tr} \hat{\rho}_i^{(\text{out})} \hat{\Pi}_j$ により与えられる。したがって、POVM Π が \mathcal{E}_M を識別する誤り率は、(3.1) で計算できる。

$$P_e(\rho^{(\text{out})}, \Pi) = 1 - \sum_i \text{Tr} \xi_i \hat{\rho}_i^{(\text{out})} \hat{\Pi}_i \quad (3.1)$$

また、量子力学的に許される最小誤り率 (i.e. ヘルストロム限界) P_e^{Opt} は

$$P_e^{\text{Opt}}(\rho^{(\text{out})}) = \min_{\Pi \in \mathcal{M}} P_e(\rho^{(\text{out})}, \Pi) \quad (3.2)$$

で求められる。ただし、 \mathcal{M} は POVM の全集合である。本論文では、(3.2) を満たす Π を、量子最適測定または量子最適受信機と呼ぶ。

3.2 送受信量子状態信号

詳細は 5.1 節で述べるが、本研究では、送信量子状態として式 (2.25) で示されたコヒーレント状態を扱う。コヒーレント状態に位相に情報を乗せる MPSK 変調 (M -ary phase-shift keying) を施し、量子通信路を通して送信とする。この送信コヒーレント状態信号の密度作用素 $\hat{\rho}_i^{(\text{in})}$ ($i = 0, 1, \dots, M-1$) は以下のように表される。

$$\hat{\rho}_i^{(\text{in})} = |\alpha e^{j\frac{2i\pi}{M}}\rangle \langle \alpha e^{j\frac{2i\pi}{M}}| \quad (3.3)$$

ただし、 $j = \sqrt{-1}$ である。また、上式において、 $\alpha e^{j\frac{2i\pi}{M}}$ がコヒーレント振幅であるが、簡単のため、基準となる α は実数であるとする。量子通信路に位相雑音が生じる場合、受信混合状態信号の密度作用素 $\hat{\rho}_i^{(\text{out})}$ は以下のように書ける [28, 37].

$$\hat{\rho}_i^{(\text{out})} = \int_{\mathbb{R}} P(\theta) |\alpha e^{j(\frac{2i\pi}{M} + \theta)}\rangle \langle \alpha e^{j(\frac{2i\pi}{M} + \theta)}| d\theta \quad (3.4)$$

ただし、 \mathbb{R} は実数全体である。ここで、文献 [28, 38] 同様に、位相変動 θ の確率分布 $P(\theta)$ は、平均 0、分散 (位相雑音量) σ^2 の正規分布に従うものとする。

$$P(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{\theta^2}{2\sigma^2}} \quad (3.5)$$

特定の状況を想定せずに広く誤り率特性を調べるため、本研究においても、 $\sigma = \frac{\pi}{2}$ までを扱った文献 [28]、 $\sigma = \pi$ までを扱った文献 [38] と同程度まで σ の値を取り扱うこととする。更に、式 (3.4) の行列表現は以下のとおりであることが知られ [28]、数値計算をするために有用である。

$$\hat{\rho}_i^{(\text{out})} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^{n+m}}{\sqrt{n!m!}} e^{-|\alpha|^2 - \frac{\sigma^2(n-m)^2}{2} + j\frac{2i\pi}{M}(n-m)} |n\rangle \langle m| \quad (3.6)$$

本研究では、5.2節以降の誤り率計算のため、通常の数値計算手法を踏襲し、式(3.6)を有限の $n(=m)$ までとする近似式を使って計算を行う。その際、本研究で取り扱う平均光子数や誤り率のオーダーを勘案して、適切な n で打ち切り設定する。具体的には、例えば無雑音環境 (i.e. $\sigma^2 = 0$) で平均光子数が1のBPSKコヒーレント状態信号が受信される場合、 $n = 9$ である確率のオーダーは 10^{-6} 程度であるのに対し、誤り率のオーダーは 10^{-3} 程度である。前者は後者に比べて無視し得るため、式(3.6)の行列サイズは $(n+1) \times (m+1) = 10 \times 10$ 以上で打ち切れればよい。

3.3 BPSK量子状態信号に対する量子最適測定

量子最適受信機は最小誤り率 P_e^{Opt} (i.e. ヘルストロム限界) を達成する量子受信機である。 $M = 2$, すなわちBPSK (binary phase-shift keying) 量子状態信号に対して、POVM $\{\hat{\Pi}_0, \hat{\Pi}_1\}$ を用いた場合の誤り率は

$$P = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \text{Tr} (\hat{\rho}_0^{(\text{out})} - \hat{\rho}_1^{(\text{out})}) \hat{\Pi}_0 \right\} \quad (3.7)$$

により計算できる。最小の P を得るためには、 $\text{Tr} (\hat{\rho}_0^{(\text{out})} - \hat{\rho}_1^{(\text{out})}) \hat{\Pi}_0$ を最大化する必要がある。一般に、その最大化は以下のように行われる。まず、 $(\hat{\rho}_0^{(\text{out})} - \hat{\rho}_1^{(\text{out})})$ のスペクトル分解表現を使い、 $\text{Tr} (\hat{\rho}_0^{(\text{out})} - \hat{\rho}_1^{(\text{out})}) \hat{\Pi}_0$ を

$$\sum_{\lambda_k > 0} \lambda_k \langle \lambda_k | \hat{\Pi}_0 | \lambda_k \rangle + \sum_{\lambda_k \leq 0} \lambda_k \langle \lambda_k | \hat{\Pi}_0 | \lambda_k \rangle \quad (3.8)$$

と表す。ただし、 $\{\lambda_k\}$ と $\{|\lambda_k\rangle\}$ は $(\hat{\rho}_0^{(\text{out})} - \hat{\rho}_1^{(\text{out})})$ の固有値とそれに対応する正規直交化された固有ベクトルである。上式の第1項が正、第2項が非正であることから、その最大化は、第2項を0にするように決定作用素を定めることで達成される。したがって、最適なPOVM、つまり量子最適測定 $\{\hat{\Pi}_0^{\text{Opt}}, \hat{\Pi}_1^{\text{Opt}}\}$

とそれによる最小誤り率 $P_{e(2\text{-ary})}^{\text{Opt}} (\in P_e^{\text{Opt}})$ は、以下のとおりとなる [8].

$$\hat{\Pi}_0^{\text{Opt}} = \sum_{\lambda_k > 0} |\lambda_k\rangle\langle\lambda_k| \quad (3.9)$$

$$\hat{\Pi}_1^{\text{Opt}} = \sum_{\lambda_k \leq 0} |\lambda_k\rangle\langle\lambda_k| \quad (3.10)$$

$$P_{e(2\text{-ary})}^{\text{Opt}} = \frac{1}{2} \left(1 - \sum_{\lambda_k > 0} \lambda_k \right) \quad (3.11)$$

3.4 MPSK 量子状態信号に対する量子最適測定

MPSK 量子状態信号 ($M > 2$) を量子測定する場合の最適な POVM, つまり量子最適測定とそれによる最小誤り率 $P_{e(M\text{-ary})}^{\text{Opt}} (\in P_e^{\text{Opt}})$ (ヘルストロム限界) を求めるために, 本研究ではヘルストロムのアルゴリズム [39] を用いる. このアルゴリズムは $M (> 2)$ 個の仮説を前提として, 全ての仮説対に対して 2 値決定の平均コストの最小化を繰り返すことにより, ベイズコスト (Bayes cost) を減らすものである. アルゴリズムにより求められた最適な POVM を, 式 (3.1) に代入して最小誤り率 $P_{e(M\text{-ary})}^{\text{Opt}}$ を計算する. 以下にアルゴリズムの概略を説明する.

仮説 H_k が真の場合, 仮説 $H_j (j, k = 0, 1, \dots, M-1)$ が選択される確率は

$$P(H_j|H_k) = \text{Tr} \hat{\rho}_k^{(\text{out})} \hat{\Pi}_j \quad (3.12)$$

である. ここで C_{jk} をコストとし, 全ての $j \neq k$ に対して $C_{kk} \leq C_{jk}$ とする [8, 40]. POVM $\{\hat{\Pi}_j\}$ を用いた平均危険関数 (平均コストあるいはベイズコストともいう) は

$$\bar{C} = \text{Tr} \sum_{j=0}^{M-1} \hat{W}_j \hat{\Pi}_j \quad (3.13)$$

と表される. ここで, \hat{W}_j は j 番目の危険作用素

$$\hat{W}_j = \sum_{k=0}^{M-1} \xi_k C_{jk} \hat{\rho}_k^{(\text{out})} \quad (3.14)$$

である．ヘルストロムのアルゴリズムは，上記 \bar{C} を目的関数とし，繰り返しアルゴリズムにより最小化するものである．なお， \bar{C} は誤り率を一般化した関数であり， $C_{jk} = 1 - \delta_{jk}$ と定めると誤り率を表す関数となることが知られている．ただし， δ_{jk} はクロネッカーのデルタである．

アルゴリズムの終了条件として，以下の2つの必要十分条件を満たす必要がある．

1. 作用素

$$\hat{\Upsilon} = \sum_{j=0}^{M-1} \hat{W}_j \hat{\Pi}_j = \sum_{j=0}^{M-1} \hat{\Pi}_j \hat{W}_j \quad (3.15)$$

は自己共役作用素．

2. $i = 0, 1, \dots, M-1$ に対して，作用素 $(\hat{W}_i - \hat{\Upsilon})$ は半正定値．

さて，ヘルストロムのアルゴリズムは，最適な POVM を探索するための $\{\hat{\Pi}_j\}$ の初期値を定め，終了条件を満たすまで， $\{\hat{\Pi}_j\}$ の更新作業を定められたルールに従い繰り返すものである．まず，前処理として，ヒルベルト空間 \mathcal{H} を M 個の適当な直交部分空間の直和に分割し，各部分空間 \mathcal{H}_j への射影子を $\hat{\Pi}_j$ の初期値として定め，その集合を $\{\hat{\Pi}_j\}$ とする．次に， $\{\hat{\Pi}_j\}$ の更新作業について述べる．2つの部分空間 \mathcal{H}_p と \mathcal{H}_q の和 $\mathcal{H}_p \oplus \mathcal{H}_q$ を $\mathcal{H}'_p \oplus \mathcal{H}'_q$ に更新することが基本であるが，部分空間 $\mathcal{H}_p, \mathcal{H}_q$ に対応する射影子 $\hat{\Pi}'_p, \hat{\Pi}'_q$ から， $\mathcal{H}'_p, \mathcal{H}'_q$ に対応する射影子 $\hat{\Pi}''_p, \hat{\Pi}''_q$ へと次のように更新する．

$$\hat{I}'_{pq} (\hat{W}_q - \hat{W}_p) \hat{I}'_{pq} |\eta\rangle = \eta |\eta\rangle \quad \text{where } \hat{I}'_{pq} = \hat{\Pi}'_p + \hat{\Pi}'_q \quad (3.16)$$

$$\hat{\Pi}''_p = \sum_{\eta>0} |\eta\rangle \langle \eta| \quad (3.17)$$

$$\hat{\Pi}''_q = \sum_{\eta \leq 0} |\eta\rangle \langle \eta| \quad (3.18)$$

最後に，この更新を (p, q) の全ての組み合わせ，つまり $\frac{1}{2}M(M-1)$ 通りだけ繰り返してから，終了条件をチェックするプロセスを1ループとして，ループの繰り返しによってアルゴリズムが実行される．なお，更新プロセスにおいて，誤り率は単調非増加であり誤り率は0以上で下に有界であるため

必ず収束するが、誤り率が収束しても最適な POVM の必要十分条件を満たすという終了条件が満たされない可能性もある。このため、誤り率に変化がなくなっても終了条件を満たさなかったときには探索を中止し、初期値を変えてアルゴリズムを再実行する必要がある。本研究では、[39]と同様、square-root measurement (SRM) [41] の決定作用素を $\{\hat{\Pi}_j\}$ の初期値として用いたが、実行した限りではすべての場合について、1回の実行で大域最適解に収束し、初期値を変えるプロセスに進むことはなかった。

3.5 信号光に対する古典最適測定

これまでに述べた量子通信システムについて、量子測定に対応する量子受信機を古典測定に対応する古典受信機に置き換えるだけで従来の光通信システムとなるといえる。コヒーレント光通信システムには大別して、信号光と局発光がまったく同じ周波数をもつ光ホモダインと、信号光と局発光が異なる周波数をもつ光ヘテロダインの2種類の光混合受信機がある。これらはそれぞれホモダイン受信機とヘテロダイン受信機と呼ばれる。古典的通信理論(e.g. [42, 43])では、光ヘテロダインは、周波数 f_c をもつ受信信号光に、それと異なる周波数 f_o をもつ局発光を混合し、受光素子を用いて二乗検波して、受信機出力に中間周波数 $|f_o - f_c|$ に相当するビート信号を得るものである。光ホモダインは、受信信号光に、それと同じ周波数をもつ局発光を混合し、受光素子を用いて二乗検波して、受信機出力には直接、ベースバンド信号を得るものである。しかし、一見して周波数だけの違いだが、上記の測定過程を量子通信理論における量子測定過程として解析すると、両光混合受信機は本質的に異なるものとなる。文献[40]で示されたとおり、光ホモダインは、複素振幅の一成分の測定器となる一方で、光ヘテロダインは、複素振幅の両成分の測定器となる。ここでいう、古典論の複素振幅の直交成分 x_C (コサイン成分) と x_S (サイン成分) は、量子論では、直交振幅作用素 \hat{X}_C と \hat{X}_S に対応する。光波の複素振幅 α が対応している量子論の複素振幅作用素 (光子消滅作用素ともいう) を $\hat{\alpha}$ と表すと、

$$\alpha = x_C + jx_S, \quad \hat{\alpha} = \hat{X}_C + j\hat{X}_S \quad (3.19)$$

のような対応がある。ただし、 $j = \sqrt{-1}$ である。量子論においては、物理量は作用素で表され、非可換な2つの物理量に対して同時に精確な値での測定が不可能であるという不確定性原理は、量子論のもっとも重要な原理の一つである。複素振幅の両成分は非可換量であり、不確定性原理で制約されることが知られている。したがって、光ホモダインと違い、光ヘテロダインには非可換量同時測定の理論を適用する必要があることに注意しておく。

さて、本研究で取り扱う古典測定は、従来の通信システムにおける検出限界である標準量子限界 P_e^{OptCla} を達成できる古典最適測定である。以下にこれを説明する。

3.5.1 ホモダイン測定

ホモダイン測定はBPSK光信号に対し最小の誤り率を達成できる古典受信機であり、古典最適受信機とも呼ばれている (e.g. [44])。混合状態信号(3.4)が受信される場合、ホモダイン測定による誤り率 $P_e^{\text{Hom}} (\in P_e^{\text{OptCla}})$ (i.e. 標準量子限界) は以下のとおりとなる。

$$P_e^{\text{Hom}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^0 \int_{\mathbb{R}} P(\theta) e^{-2(x-|\alpha|\cos\theta)^2} d\theta dx \quad (3.20)$$

3.5.2 ヘテロダイン測定

ヘテロダイン測定はMPSK光信号 ($M > 2$) に対し最小の誤り率を達成できる古典受信機であり、この場合の古典最適受信機と呼ぶことができる (e.g. [8])。混合状態信号(3.4)が受信される場合、ヘテロダイン測定による誤り率 $P_e^{\text{Het}} (\in P_e^{\text{OptCla}})$ (標準量子限界) は以下のとおりである。

$$P_e^{\text{Het}} = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\frac{\pi}{M}}^{\frac{\pi(2M-1)}{M}} \int_0^{\infty} P(\theta) r e^{-r^2 - |\alpha|^2 + 2r|\alpha|\cos(\phi-\theta)} dr d\phi d\theta \quad (3.21)$$

第4章 量子レーダの基礎

本章では、量子レーダシステムの数学的記述やレーザーレーダについて説明を行う。

4.1 量子レーダシステム

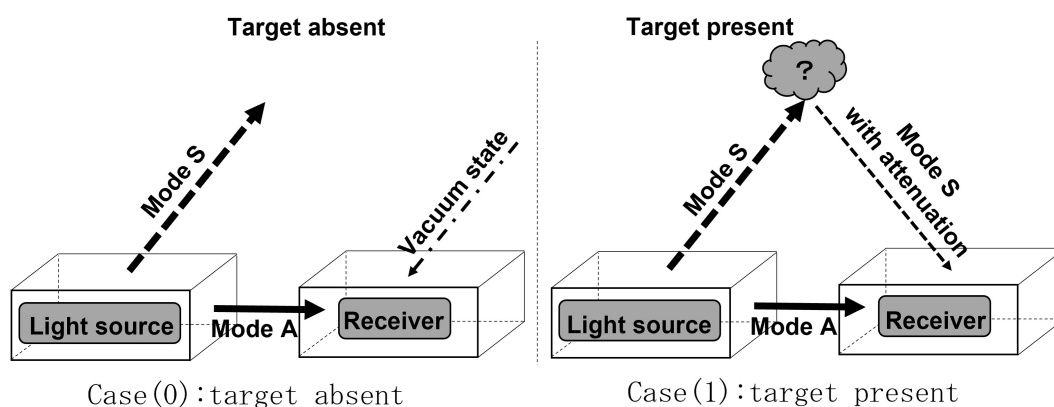


図 4.1: 量子イルミネーションのモデル

詳細は6.1節で述べるが、本研究では、Tanらの文献[33]にて示された、エンタングルド状態を用いた量子イルミネーションを量子レーダとして扱う。量子イルミネーションのモデルを図4.1に示す。破線、実線の矢印はそれぞれ、エンタングルド状態におけるS系とA系を表している。鎖線は真空状態を表している。

量子イルミネーションのプロトコルは以下のようなになる。

1. エンタングルド状態のA系の光（アンシラ光）のみ受信機に照射する。

2. S系の光（シグナル光）を目標に向かって照射する．
3. 受信機には，アンシラ光と，目標から反射してきたシグナル光の両方が入力される．
4. 受信機で量子最適測定（量子一括測定）を行うことにより，目標の存在を確認する．

2において，目標が存在しない場合は照射光は反射されない．その代わりに真空状態が受信機に入力される．目標が存在する場合は照射光は反射され受信機に入力される．Tanらのモデルでは，送信機から目標，目標から受信機までの伝送路を，熱雑音と減衰がある伝送路としている．本研究では，擬似ベル状態を量子イルミネーションに応用する第一歩として，伝送路にエネルギー減衰のみが生じる場合を考える．次の節では，減衰伝送路を考えたとき，受信量子状態がどのように表現されるのかについて述べる．

4.2 受信量子状態の表現

本節では，各エンタングルド状態を用いたときの受信量子状態について述べる．ただし，議論の見通しに鑑み，ベル状態と2モードのガウス状態についてはKraus表現に，擬似ベル状態についてはStinespring表現により解析を行う．

4.2.1 Kraus表現

ベル状態と2モードのガウス状態の場合，その減衰伝送路を表現するためにKraus表現を用いる．Kraus表現を用いることで送受信量子状態の関係を示すことができる．送信量子状態，受信量子状態をそれぞれ $\rho^{(\text{in})}$, $\rho^{(\text{out})}$ とすると減衰伝送路のKraus表現は以下ようになる．

$$\hat{\rho}^{(\text{out})} = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{E}_k \hat{\rho}^{(\text{in})} \hat{E}_k^\dagger \quad (4.1)$$

ただし、 η をエネルギー透過率として、 E_k は減衰伝送路の Kraus 作用素 [45] である。

$$\hat{E}_k = \sum_n \sqrt{\binom{n}{k}} \sqrt{\eta^{n-k}(1-\eta)^k} |n-k\rangle\langle n| \quad (4.2)$$

4.2.2 Kraus 表現によるベル状態

目標が存在しない場合のベル状態を考える。ここで、S系としてシグナル光の代わりに真空状態 $|0\rangle_S$ が受信機に入力する。この場合、受信量子状態は以下のように表される。

$$\hat{\Phi}_{SA}^{(0)} = |0\rangle_S \langle 0| \otimes \text{Tr}_S(|\Phi^+\rangle_{SA} \langle \Phi^+|) \quad (4.3)$$

次に、目標が存在する場合のベル状態を考える。ここで、シグナル光は減衰する。受信量子状態は以下のように表される。

$$\hat{\Phi}_{SA}^{(1)} = \sum_{k=0}^1 \left\{ (\hat{E}_k)_S \otimes \hat{I}_A \right\} |\Phi^+\rangle_{SA} \langle \Phi^+| \left\{ (\hat{E}_k)_S \otimes \hat{I}_A \right\}^\dagger \quad (4.4)$$

ただし、 \hat{I}_A は A 系の恒等作用素である。

4.2.3 Kraus 表現による 2 モードのガウス状態

2モードのガウス状態を用いる場合の受信量子状態も、ベル状態同様に考えられる。目標が存在しない場合と存在する場合の受信量子状態はそれぞれ以下のように表される。

$$\hat{\psi}_{SA}^{(0)} = |0\rangle_S \langle 0| \otimes \text{Tr}_S(|\psi\rangle_{SA} \langle \psi|) \quad (4.5)$$

$$\hat{\psi}_{SA}^{(1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ (\hat{E}_k)_S \otimes \hat{I}_A \right\} |\psi\rangle_{SA} \langle \psi| \left\{ (\hat{E}_k)_S \otimes \hat{I}_A \right\}^\dagger \quad (4.6)$$

4.2.4 Stinespring 表現による擬似ベル状態

目標が存在しない場合、最大擬似ベル状態を用いたときの受信量子状態は、上記の状態同様に考えられる。

$$\hat{\Psi}_{SA}^{(0)} = |0\rangle_S \langle 0| \otimes \text{Tr}_S(|\Psi_2\rangle_{SA} \langle \Psi_2|) \quad (4.7)$$

次に、目標が存在する場合の最大擬似ベル状態を考える。Stinespring 表現では、S系に対する減衰による量子効果の劣化は、その系と環境系E（真空場）との相互作用として解析することができる。言い換えると、複合系SEのユニタリ発展は、環境系Eとの相互作用を表す複合系SE上のユニタリ作用素 \hat{U}_{SE} で記述できる。

$$\hat{U}_{SE}|\alpha\rangle_S|0\rangle_E = |\sqrt{\eta}\alpha\rangle_S|\sqrt{1-\eta}\alpha\rangle_E \quad (4.8)$$

$$\hat{U}_{SE}|-\alpha\rangle_S|0\rangle_E = |-\sqrt{\eta}\alpha\rangle_S|-\sqrt{1-\eta}\alpha\rangle_E \quad (4.9)$$

そして、受信機で実際に測定されるのは複合系SAであるため、全体系SAEに対して環境系Eの部分トレースを取ることにより、複合系SAの縮約状態、つまり受信量子状態が求められる。

$$\hat{\Psi}_{SA}^{(1)} = \text{Tr}_E \left\{ (\hat{U}_{SE} \otimes \hat{I}_A)(|\Psi_2\rangle_{SA} \langle \Psi_2| \otimes |0\rangle_E \langle 0|)(\hat{U}_{SE} \otimes \hat{I}_A)^\dagger \right\} \quad (4.10)$$

なお、非最大擬似ベル状態についても同様に考えられる。

4.3 受信量子状態に対する量子最適測定

量子イルミネーションでは、目標が存在しない場合と存在する場合の先験確率は、一般的に等確率と設定される (e.g. [33, 46])。それは、目標の有無に関する事前情報をもたないことを表す。事前情報をもたない場合、信号検出理論においてはミニマックス規範が用いられるが、量子ミニマックス規範において、先験確率が等確率の場合のベイズ決定規範を用いることが最適であることが知られている [47]。

したがって、本研究では、目標が存在しない場合と存在する場合の受信量子状態をそれぞれ $\hat{\rho}_{SA}^{(0)}, \hat{\rho}_{SA}^{(1)}$ と、両受信量子状態の先験確率を $\frac{1}{2}$ とする。この

とき, $\hat{\rho}_{SA}^{(0)} - \hat{\rho}_{SA}^{(1)}$ の固有値を $\{\lambda_i\}$ とすると, 目標の有無を識別するにあたっての, 量子最適測定による誤り率は式(3.11)と同様で以下のように表される [8].

$$P_e^{(QI)} = \frac{1}{2} \left(1 - \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i \right) \quad (4.11)$$

4.4 レーザーレーダ

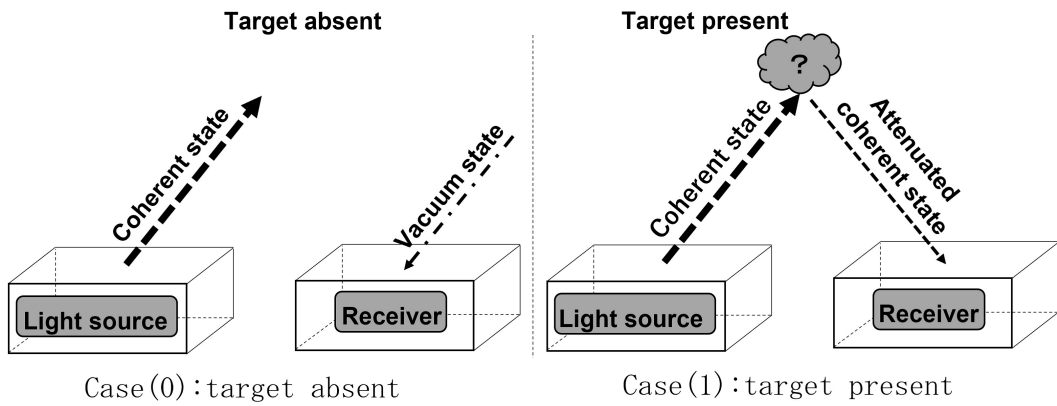


図 4.2: レーザーレーダのモデル

本研究では, 図4.2に示した, A系を有しない従来のレーザーレーダ (古典レーダ) との比較も行う. ここで, 送信量子状態はコヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ (破線) であり, 目標が存在しない場合と存在する場合の受信量子状態はOOK変調 (on-off keying) と同様の2元コヒーレント状態信号 $\{|0\rangle, |\sqrt{\eta}\alpha\rangle\}$ となる. ただし, 両信号は等先験確率とする. また, 測定は古典的な最適測定を達成するホモダイン測定を用いるとする. 伝送路に減衰が生じる場合, ホモダイン測定による誤り率 $P_e^{(LR)}$ は以下のとおりである.

$$P_e^{(LR)} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left[\sqrt{\frac{\eta|\alpha|^2}{2}} \right] \quad (4.12)$$

第5章 位相雑音環境下における量子受信機の誤り率特性とその設計

本章では、第1章で述べた目標1のとおり、第3章の量子通信システムを踏まえて位相雑音の効果を解析し、量子受信機の性能に対する影響を明らかにする。さらに、位相雑音に対してロバストな量子受信機の設計方針を示す。

5.1 はじめに

量子通信分野において、コヒーレント状態（理想的なレーザー光）は有望な通信媒体として盛んに研究されている。例えば、コヒーレント状態の利用によって、線形損失通信路や熱雑音環境などにおいて究極的な通信路容量が達成できることが広く知られている [24, 48]。また、位相に情報を乗せる *MPSK* (*M*-ary phase-shift keying) 変調などを施すことによって、コヒーレント状態信号に対し効率的に古典情報をエンコードすることができる。多くの研究で、量子信号検出に対する平均誤り率（以下、誤り率と呼ぶ）を明らかにすることによって、量子通信システムの性能評価が行われている (e.g. [49, 50])。この誤り率を最小化するように最適化された量子測定は量子最適測定と呼ばれ、量子通信の究極の性能を達成するものとして重要である [5, 6, 7, 8, 40]。量子最適測定による誤り率は、特に最小平均誤り率あるいは単に最小誤り率と呼ばれ、量子状態信号の検出限界（これをヘルストロム限界と呼ぶ）を示すものとなる。ヘルストロム限界は、従来の通信システムにおける検出限界である標準量子限界を打破することが期待される。こ

の量子測定の最適化は、与えられた量子信号に対し、文字通り量子測定をより量子信号に適したものにすることであることを注意しておく。例えば、BPSK (binary phase-shift keying) 信号に対する古典的な最適測定を達成する受信機 (古典最適受信機) はホモダイン受信機であるが、信号の振幅がどのような大きさでも同じホモダイン受信機により古典的な最適測定が達成されるのに対し、量子最適測定あるいはそれに準ずる量子準最適測定 (これらを達成する受信機を量子最適受信機と量子準最適受信機と呼ぶ) は、信号の振幅の大きさに依存して決まる。BPSK 信号に対する量子最適測定の実現法の一つとして古くから Dolinar 受信機 [51] が知られており、その元になった量子準最適受信機として Kennedy 受信機 [52] があるが、Kennedy 受信機が信号と局発光の振幅の大きさをちょうど同じに合わせるという特徴を持つことは、上記のことを如実に表している。この高度に信号にチューニングされるという量子最適測定の特徴から、信号の少しの変化でその性能が最適から大きく外れないかという、いわゆるロバスト性の問題について、量子最適測定を扱う場合は常に留意する必要がある。

さて、MPSK 信号を考えたときは、位相に情報を乗せるという特徴から、位相雑音の影響を大きく受けることが容易に想像できる。Olivares らはこのような問題を理論的・実験的に取り扱った。彼らは、位相変動 θ が平均 0 で分散 (位相雑音量に対応) σ^2 の正規分布 $N(0, \sigma^2)$ に従うモデルに基づき、研究を行った [28]。その結果、位相雑音が大きいつきには、量子準最適受信機である Kennedy 受信機がホモダイン受信機よりも性能が悪くなってしまうことが明らかにされている。これは、Kennedy 受信機が位相変動に対してロバストではないということを表しているものといえる。彼らの実験は、実験室内で位相変動時に人為的に位相雑音を乗せることにより行われたため、位相雑音量自体が正確に与えられていたが、実際の応用場面では必ずしも位相雑音量の見積もりが正確かつリアルタイムに行えるとは限らない。例えば、光無線通信における位相雑音は乱気流による波面歪みやレーザー線幅などによって引き起こされることが考えられ、やはり正規分布 $N(0, \sigma^2)$ に従うモデルが扱われている (e.g. [53, 54])。このうち、前者のように量子通信路で引き起こされる位相雑音量の正確かつリアルタイムの見積もりは困難

である。更に、近年量子通信の形態が多様になったことに伴い、低軌道衛星に基づいた地上-衛星通信をはじめ、地上のアンテナを動かし衛星を追う必要があるような通信方式なども望まれている。そのような場合は、量子通信路自体が常に変化するため、 σ^2 にも変化が生じ、上記の困難さは益々増してしまうことが予想される。このように、 σ^2 の変化に完全には追従できない量子受信機¹を想定し、実際の雑音と見積もった雑音がどの程度のギャップのときにどの程度の性能劣化になるのかを調べることは、量子通信の実現に向けた新たな研究として必要であると考えられる。

本研究は、超長距離無線量子通信などの実現に向けて、量子通信路に不可避な位相雑音（正規分布 $N(0, \sigma^2)$ に従うとする）が生じることを想定し、現実の実験に結びつけるために理論的解析・計算及び受信機設計を行い、パラメータが変化する際の詳細な特性を明らかにすることを目指す。前述のように、量子最適受信機は、高度に信号にチューニングされるものであり、 σ^2 の正確な見積りが前提となる。限界性能を与える量子最適受信機の特徴が基準となるため、本研究では、まず、 σ^2 が正確に見積もれる場合から出発する。具体的には、MPSK コヒーレント状態信号が送信され、正規分布 $N(0, \sigma^2)$ に従う位相雑音を受けた受信混合状態信号に対する量子最適測定¹の導出を行い、量子最適受信機による誤り率特性を明らかにする。次に、量子受信機が σ^2 の変化に追従できない場合を考える。具体的には、量子受信機として実際と異なる σ^2 に対する量子最適受信機を考え、その誤り率特性を明らかにする。この量子受信機は量子最適受信機よりも性能が悪いが、更に古典最適受信機よりも性能が低下する場合があることを示す。最後に、 σ^2 の見積もりが正確にはできないものであるという事実を認めた上で、どこまでの最適化が可能なのかを考察する。具体的には、 σ^2 の見積もりがピンポイントではできないもののある範囲 R の中に入っているという想定の下、ミニマックス規準に基づき R に対して最適化を行う。このミニマックス規準に基づく設計は、位相雑音量の変化に対しロバストな量子受信機の設計規準であるとみなすことができる。

¹本研究では、最適とは限らない量子測定に対応する受信機を量子受信機と呼ぶ。量子受信機には量子最適受信機も含まれる。

5.2節では、位相雑音が生じる場合を考え、量子最適受信機と古典最適受信機による最小誤り率 P_e^{Opt} と P_e^{OptCla} を計算しその誤り率特性を示す。5.3節では、量子受信機が σ^2 の変化に追従できない場合を考え、量子受信機と古典最適受信機による誤り率特性を示す。また、量子受信機の性能を評価する評価指標を導入する。5.4節では、本研究の主要な結果として、ミニマックス規準に基づき評価指標に関する最適化を行い、最適な量子測定による誤り率特性を示す。最後に5.5節において、本研究のまとめを示す。

5.2 位相雑音環境下の誤り率特性

本節では、位相雑音が生じる場合について、量子最適受信機と古典最適受信機による誤り率 P_e^{Opt} と P_e^{OptCla} を計算し、その誤り率特性を示す。なお、数値計算例として $M \leq 3$ までを計算する。

図5.1と5.2に、それぞれBPSKと3PSK信号を用いた場合の、平均光子数を変化させたときの誤り率を示す。実線、点線はそれぞれ、量子最適受信機による誤り率、古典最適受信機による誤り率を表している。黒線、赤線、青線はそれぞれ、分散 σ^2 を0, 0.005, 0.5とした場合を表している。横軸は平均光子数、縦軸は誤り率を表している。

図5.1と5.2は、信号数 M や位相雑音量 σ^2 にかかわらず、古典最適受信機に比べて常に量子最適受信機が優位であるという妥当な結果を示している。しかしながら、位相雑音量 σ^2 が非常に大きい場合には、両者による誤り率のギャップが縮まることがわかる。ギャップが縮まることについて、前者に対して後者の性能がより落ちると見るよりは、位相雑音という古典雑音に比べて量子雑音の影響が小さくなっていくためと解釈できる。また、 σ^2 が大きい場合、平均光子数 $|\alpha|^2$ の増加に伴って両受信機による誤り率がほぼ変わらず、同一値に収束する傾向があることがわかる。収束の様子を見るために、 σ^2 を大きな値0.5に固定し、誤り率の値を図5.1と5.2に対応する表5.1と5.2として示す。両表によると、この場合、両受信機による誤り率のオーダーは同じといえ、平均光子数 $|\alpha|^2$ を大きくすると、その差が確かに小さくなっていることがわかる。このように、位相雑音が非常に大きくなると、平

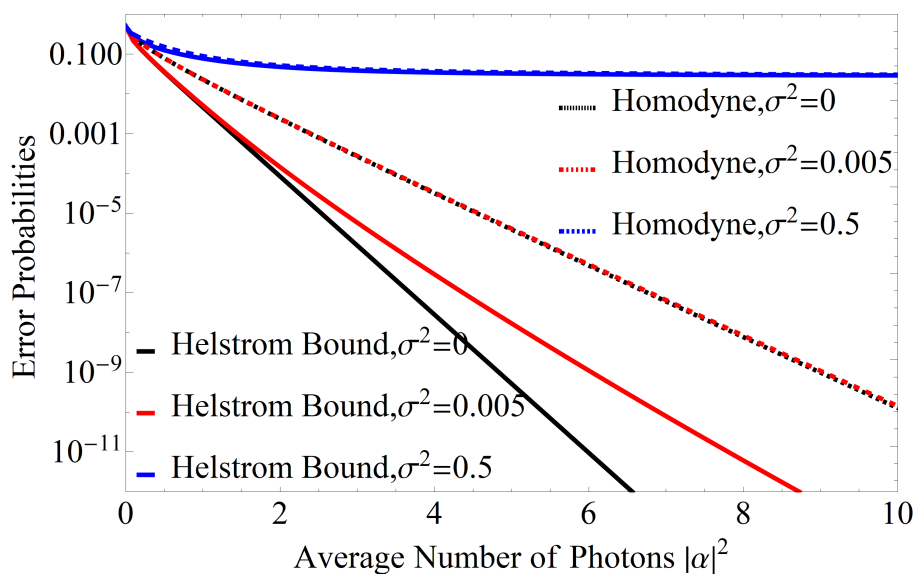


図 5.1: 位相雑音が生じる場合の BPSK 信号に対するホモダイン受信機と量子最適受信機による誤り率

$ \alpha ^2$	P_e^{Opt}	P_e^{Hom}	$P_e^{\text{Hom}} - P_e^{\text{Opt}}$
5	0.0324	0.0347	0.0023
7	0.0304	0.0321	0.0017
10	0.0290	0.0303	0.0013

表 5.1: 位相雑音量が非常に大きい場合の BPSK 信号に対するホモダイン受信機と量子最適受信機による誤り率及びその差

均光子数を増やしても、誤りを軽減することが困難なことがわかる。

さて、式 (3.2) のように、量子最適受信機は、受信混合状態信号 $\rho^{(\text{out})}$ に対して最適な POVM である Π を用いるものである。これは、量子最適受信機を用いる前提として、予め $\rho^{(\text{out})}$ を正しく見積もる必要があること、本論文の問題設定においては、位相雑音量 σ^2 を正確に見積もらなければならないことを意味する。しかしながら、量子通信路が激しく変化する場合など、位相雑音量がいつでも正しく見積もれるとは限らない。次節では、そのような場合を考える。

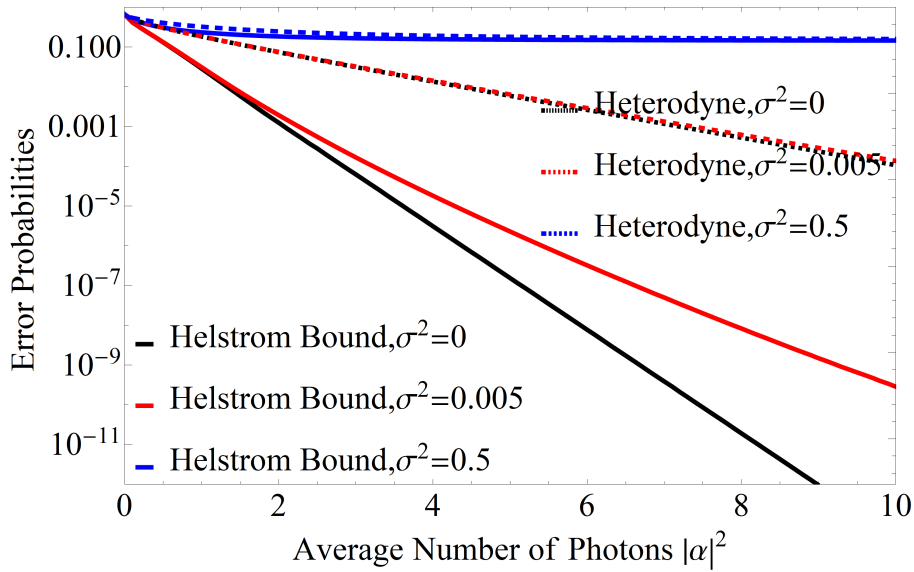


図 5.2: 位相雑音が生じる場合の 3PSK 信号に対するヘテロダイン受信機と量子最適受信機による誤り率

$ \alpha ^2$	P_e^{Opt}	P_e^{Het}	$P_e^{\text{Het}} - P_e^{\text{Opt}}$
5	0.1534	0.1810	0.0276
7	0.1487	0.1682	0.0195
10	0.1455	0.1590	0.0135

表 5.2: 位相雑音量が非常に大きい場合の 3PSK 信号に対するヘテロダイン受信機と量子最適受信機による誤り率及びその差

5.3 複雑な位相雑音環境下の量子受信機

本節では、位相雑音量の変化に量子受信機が追随できない場合など、実際の位相雑音量と異なる位相雑音量に対する量子最適受信機であるような量子受信機を使う場合を考え、量子受信機と古典最適受信機の誤り率特性を示す。また、量子受信機の性能を評価する評価指標を導入する。なお、位相雑音量が激しく変動するなど、位相雑音量の正確でリアルタイムの見積もりが困難な状況を、本研究では「複雑な位相雑音環境」と呼ぶ。

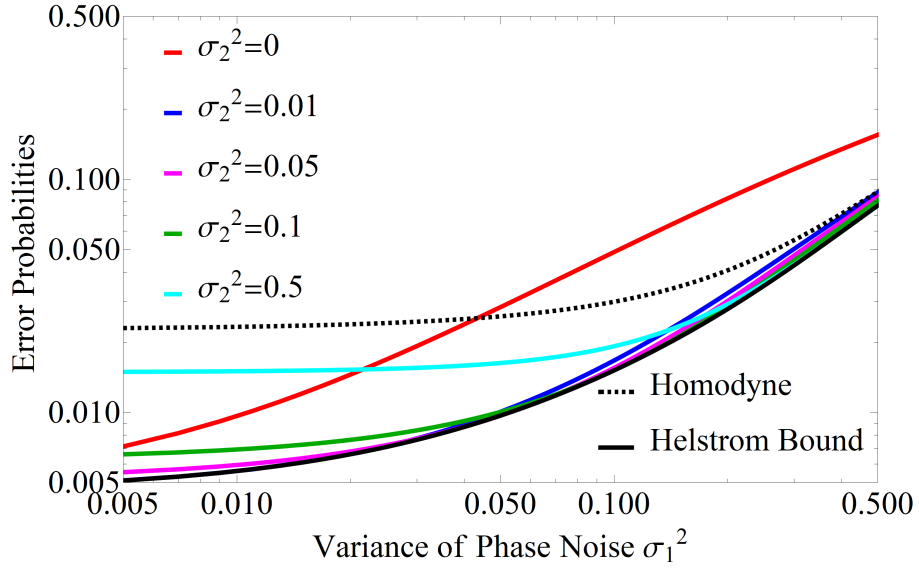


図 5.3: BPSK 信号に対するホモダイン受信機と σ_2^2 に対して最適な量子受信機による誤り率. 平均光子数 $|\alpha|^2 = 1$ の場合

5.3.1 誤り率特性

受信量子状態 $\rho^{(\text{out})}$ は, 信号数 M と平均光子数 $|\alpha|^2$ だけではなく, 位相雑音量 σ^2 に依存して決まる. このことを明示するため, 前節の最後で述べた $\rho^{(\text{out})}$ と Π をそれぞれ関数 $\rho^{(\text{out})}(\sigma^2)(:= \{\hat{\rho}_i^{(\text{out})}(\sigma^2)\})$ と $\Pi(\sigma^2)(:= \{\hat{\Pi}_j(\sigma^2)\})$ のように書き換えて表記する. 前節で $\rho^{(\text{out})}$ を正しく見積もると書いたが, 本研究では, M と $|\alpha|^2$ には変化がないことを想定するため, 位相雑音量 σ^2 を見積もることになることを注意しておく. 一方で, 本研究における古典最適受信機の構成は σ^2 の見積もりに依存しない. 3.5 節で述べたとおり, 古典最適受信機であるホモダイン受信機は 1 つの直交振幅成分という物理量を測定するものであり, ヘテロダイン受信機は, 2 つの直交振幅成分である 2 つの物理量の同時測定を行うものであるため, 受信機構成のために位相雑音量の情報は全く利用していない.

さて, 受信混合状態信号に含まれる真の位相雑音量を σ_1^2 , 量子受信機構成のために見積もられた位相雑音量を σ_2^2 とする. $\rho^{(\text{out})}(\sigma_2^2)$ に対して最適な POVM である $\Pi(\sigma_2^2)$ を用いて $\rho^{(\text{out})}(\sigma_1^2)$ を量子測定する場合, 量子受信機によ

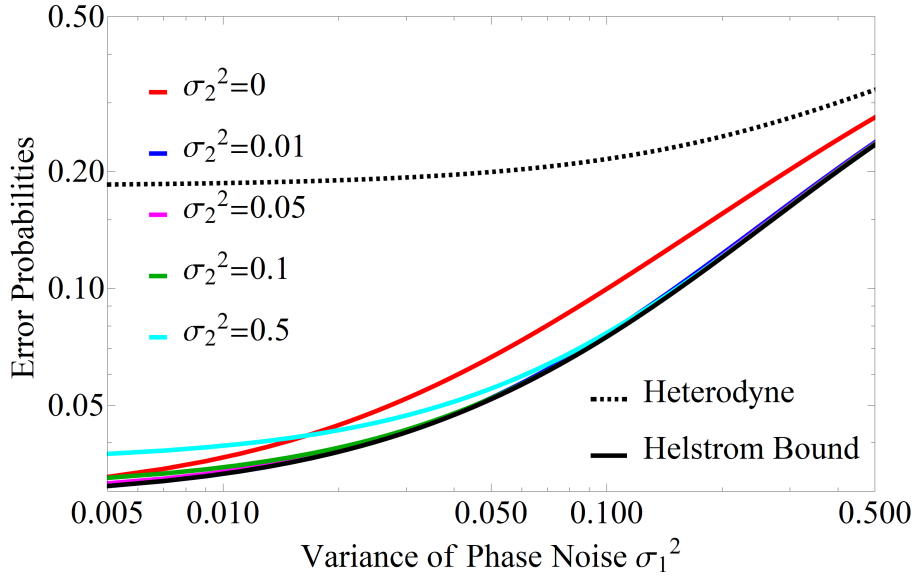


図 5.4: 3PSK 信号に対するヘテロダイン受信機と σ_2^2 に対して最適な量子受信機による誤り率. 平均光子数 $|\alpha|^2 = 1$ の場合

る誤り率 P'_e は以下のとおりである.

$$P'_e(\sigma_1^2, \Pi(\sigma_2^2)) = 1 - \sum_i \text{Tr} \xi_i \hat{\rho}_i^{(\text{out})}(\sigma_1^2) \hat{\Pi}_i(\sigma_2^2) \quad (5.1)$$

$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ の場合は, $P'_e = P_e^{\text{opt}}$ である.

図 5.3 と 5.4 に, 平均光子数 $|\alpha|^2$ を 1 に固定し, それぞれ BPSK と 3PSK 信号を用いた場合の, 真の位相雑音量 σ_1^2 を変化させたときの誤り率を示す. 図 5.5 は図 5.3 とほぼ同設定であるが, $|\alpha|^2$ だけを 3 に固定した. 実線, 点線はそれぞれ, 量子受信機による誤り率, 古典最適受信機による誤り率を表している. 赤線, 青線, 桃色線, 緑線, 水色線はそれぞれ, 見積もった位相雑音量 σ_2^2 が 0, 0.01, 0.05, 0.1, 0.5 とした場合である. また, 黒い実線²は量子最適受信機による誤り率を表している. 横軸は真の位相雑音量, 縦軸は誤り率である. なお, $\sigma_2^2 = 0$ は, 受信信号をコヒーレント状態信号として見積もることを意味する.

図 5.3 において, まず注目すべきなのは赤線 ($\sigma_2^2 = 0$) である. σ_1^2 を大き

²その他の線と重なり見えにくくなる場合があるが, 常に最も低い誤り率を示している.

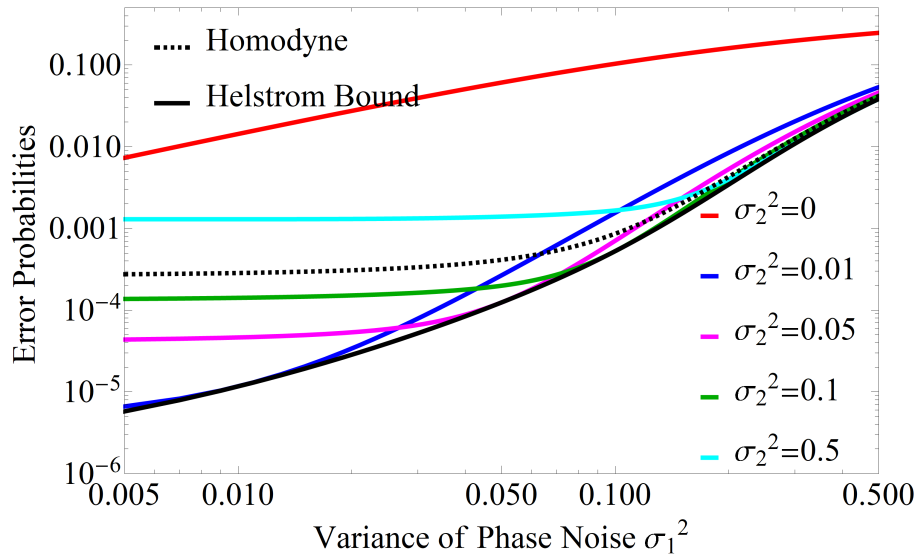


図 5.5: BPSK 信号に対するホモダイン受信機と σ_2^2 に対して最適な量子受信機による誤り率. 平均光子数 $|\alpha|^2 = 3$ の場合

くするほど、見積もった位相雑音量は真の位相雑音量とのギャップが大きくなるため、誤り率が急激に劣化している. $\sigma_1^2 \leq 0.043$ のときは、古典最適受信機に対して量子受信機の優位性（以下、量子優位性と呼ぶ）があるが、 $\sigma_1^2 > 0.043$ のとき、逆に古典最適受信機のほうが優位となる. このように、量子受信機が σ_1^2 を誤って見積もる場合、量子優位性が失われることがあることがわかる. また、その他の線では、 σ_1^2 が 0.5 までの範囲では量子優位性が失われていない. 特に、青線と桃色線は、ほぼヘルストロム限界を達成している. したがって、ある程度の大きさに σ_2^2 を設定すれば、 σ_1^2 と多少の違いがあっても準最適性が保たれることがわかる.

図 5.3 と 5.4 を比較すると、3PSK の方では、示した全ての σ_1^2 の範囲で量子優位性が見られている. 図 5.4 では、誤り率の値自体が図 5.3 よりも大きいということはあるが、図 5.3 に比べるとどの色の実線も同じような値を示しており、見積もった位相雑音量により誤り率に大差がないことは興味深い. 示した全ての σ_1^2 の範囲で量子優位性が見られることについては、ヘテロダイン受信機が非可換量同時測定を行うことによる測定の不確定性の影響を受けることから、量子最適受信機とのギャップがそもそも大きかったという

ことはあると考えられる。

最後に図 5.5 を見ると，平均光子数 $|\alpha|^2$ が大きいときには，位相雑音量 σ_1^2 が小さい場合に量子優位性として誤り率が数桁以上改善することもあるが，明らかに図 5.3 に比べて量子優位性が見られない場合が多くなっている．このように，平均光子数 $|\alpha|^2$ を大きくすると， σ_1^2 を誤って見積もることに対する耐性が弱まるということがいえる．実際，位相雑音が無いと見積もった場合に対応する赤線だけでなく，位相雑音が非常に大きいと見積もった水色線も，グラフの広い範囲で量子優位性を示していないという結果となっている．

5.3.2 評価指標

さて，量子受信機を使うメリットは，古典最適受信機より優れているという量子優位性のためである．位相雑音量の見積もりが不正確だったり，通信路の激しい変動に完璧に追従できなかったとしても，量子優位性が大きいのであれば，量子受信機を使う意味は大いにある．この量子優位性を見るため，量子受信機と古典最適受信機の誤り率という2つの量ではなく，1つの量で評価できればわかりやすい．簡単には，量子受信機と古典最適受信機の誤り率の差が考えられるが，差の場合は，その際に得られる数値の良し悪しを考えるのに結局誤り率そのものも見る必要があるなど，便利ともいえない面がある．このため，本研究では，量子受信機の誤り率が古典最適受信機の誤り率と等しく量子優位性がなくなるときに1となり，量子受信機が量子最適受信機そのものとなる最高の場合が0となるように規格化した以下の量 S を採用する．量子受信機 $\Pi(\sigma_2^2)$ は，位相雑音量が σ_2^2 であるときに最適となる測定に対応する．

$$S(\sigma_1^2, \Pi(\sigma_2^2)) := \frac{P_e'(\sigma_1^2, \Pi(\sigma_2^2)) - P_e^{\text{Opt}}(\sigma_1^2)}{P_e^{\text{OptCla}}(\sigma_1^2) - P_e^{\text{Opt}}(\sigma_1^2)} \quad (5.2)$$

ただし， $P_e^{\text{OptCla}}(\sigma_1^2)$ と $P_e^{\text{Opt}}(\sigma_1^2)$ は，位相雑音量 σ_1^2 のときの古典最適受信機と量子最適受信機による誤り率である．

評価指標 S の例として，図 5.3 に対応するグラフを図 5.6 に示す．線の色は，図 5.3 と同様である．例えば，青線は位相雑音量を $\sigma_2^2 = 0.01$ と見積もっ

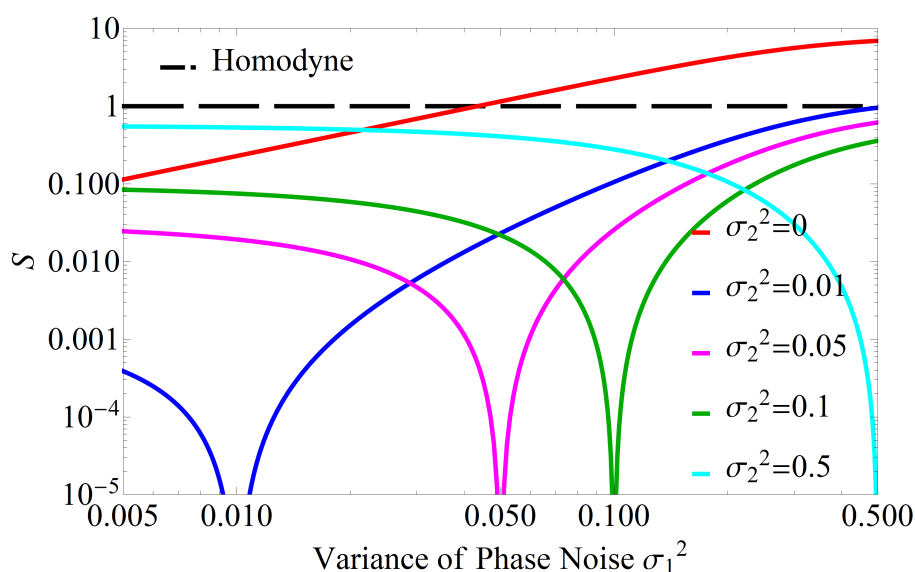


図 5.6: 図 5.3 における誤り率に関する評価指標 S のグラフ

たときの量子受信機に対する S であるが、横軸の真の位相雑音量 σ_1^2 がちょうど 0.01 のときに最小値 $S = 0$ となっていることがよくわかる。1 つの量で量子受信機の量子優位性を評価することができれば、適当な問題設定の下、その量を最小化する最適設計を考えることができるというメリットもある。次節では、ロバストな量子受信機を設計するために、評価指標 S を利用することを考える。

5.4 ロバストな量子受信機

前節では、量子受信機の設計に用いられる位相雑音量の見積もり値が真の位相雑音量と異なる場合について、誤り率特性を見てきた。しかしながら、「位相変動が激しく位相雑音量の見積もりが正確にはできない」という事実を受け入れた状況でより良い戦略を考えるとき、位相雑音量を定数として扱い量子受信機を設計しなければならない理由はない。ここでは、ある程度の位相雑音量の幅を想定した上で量子受信機の設計を行うことを考える。まず、 σ_1^2 の代わりに大まかに見積もった位相雑音量の範囲 $R(\ni \sigma_1^2)$ を考える。 R の取り方として、限られた位相 θ のサンプルサイズから求められ

た σ_1^2 の信頼水準 γ の信頼区間とすることなどが挙げられる。しかし、本研究では R の取り方の詳細を議論するのではなく、得られた R を如何に取り扱うかを考えることに注力する。ここで、 σ_1^2 は任意の確率分布で R において値を取るものとする。

パラメータが未知の場合、最悪の場合を想定して最適戦略を考えるミニマックスの考え方が有効である。以下、本節では、前節で導入した評価指標 S を利用し、ミニマックス規準に基づいて、複雑な位相雑音環境においてロバストな量子受信機を3つのケースに分けて示す。

5.4.1 ミニマックス戦略とロバスト性

まず、用いる量子受信機を位相雑音量 σ_2^2 に対応する量子最適受信機に固定し、 $\Pi'(:= \Pi(\sigma_2^2))$ を用いた場合を考える。 R という範囲で位相雑音量 σ_1^2 が変化する場合、最悪の場合、評価指標 S は、

$$S_{\max}(\Pi') := \max_{\sigma_1^2 \in R} S(\sigma_1^2, \Pi') \quad (5.3)$$

となる。ミニマックス戦略は、最悪の場合に最良の戦略を考えるものであるため、この $S_{\max}(\Pi')$ を最小とする Π' を考える。

$$S^{\text{Minimax}} := \min_{\Pi'} S_{\max}(\Pi') \quad (5.4)$$

さて、同程度の S に対して、 R がより広く取れば、ロバスト性が高いといえることができる。逆に、 R を固定したときに、 S が小さい方がロバスト性は高いともいえる。以上より、本研究では、 R を固定したときに S^{Minimax} を達成する量子受信機を、ミニマックス規準に基づき最もロバストな量子受信機と呼ぶ。

以下、利用可能な量子受信機のクラスに応じて、ミニマックス規準に基づき最もロバストな Π' を決定する手法を示す。

5.4.2 ケースA：任意の量子受信機が利用可能な場合

まずは、利用可能な量子受信機に対して一切制約を設けないという理想的な場合を考える。つまり、非負の実数全体の集合を \mathbb{R}_0^+ として、その部分

集合である任意の $R(\subseteq \mathbb{R}_0^+)$ に対して、全ての量子受信機 $\mathcal{Y} = \{\Pi(\sigma_2^2) | \sigma_2^2 \in R\}$ を準備できるとする。この量子受信機の集合 \mathcal{Y} に対して、

$$\min_{\Pi_A \in \mathcal{Y}} \max_{\sigma_1^2 \in R} S(\sigma_1^2, \Pi_A) \quad (5.5)$$

を満たす Π_A は最もロバストな量子受信機である。

5.4.3 ケースB：利用可能な量子受信機が限られている場合

任意の POVM（量子受信機）は、ナイマルク拡張を含めて考えることで拡張空間では直交射影子に対応するという意味で実現可能であることが示されている [55] が、技術上の困難などによって、利用できる量子受信機のクラスに制約を課す場合があると考えられる。そのため、全ての量子受信機を利用できるケースAと異なり、限られた数の中で適切な1つの量子受信機を利用するような状況を考える。ここでは、 N 通りの位相雑音量 $\Sigma_2 := \{\varsigma_1^2, \varsigma_2^2, \dots, \varsigma_N^2\}$ に対し、それぞれの量子最適受信機が利用できるとする。この量子受信機の集合 $\mathcal{X} = \{\Pi(\sigma_2^2) | \sigma_2^2 \in \Sigma_2\}$ に対して、

$$\min_{\Pi_B \in \mathcal{X}} \max_{\sigma_1^2 \in R} S(\sigma_1^2, \Pi_B) \quad (5.6)$$

を満たす Π_B が、この場合の最もロバストな量子受信機である。

ここで、ケースBにおける最適化の手間について考えてみる。ケースBにおいて、集合 \mathcal{X} から1つの量子受信機が選ばれるが、各量子受信機の S の値は、典型的には範囲 R 内でいったん減少し、その後増加する形となる。すなわち、図5.6の各線を見てわかる通り、位相雑音量 σ_2^2 に対応する量子受信機の S の値は、 $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ では σ_1^2 が大きくなるにつれて減少し、 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ を境に増加する。ケースBを含むミニマックス戦略において、範囲 R 内の S の最悪値を用いるという特徴から、結局、ケースBにおいて1つだけ選ばれるという量子受信機は、 R の端点 $R' = \{R_{\min}, R_{\max}\}$ において \mathcal{X} 内で最良の量子受信機となる。ただし、 $R_{\min} := \min R$, $R_{\max} := \max R$ である。この考察、すなわち「ケースBでどの量子受信機が採用されるかを考える際、端点におけ

る挙動のみに注目すればよいという事実」により，式(5.6)は以下のようにも書き換えられる．

$$\min_{\Pi_B \in \mathcal{X}} \max_{r' \in R'} S(r', \Pi_B) \quad (5.7)$$

したがって，ケースBにおける最適化は，各受信機の端点での性能を比べるだけでよく，容易にできる．

5.4.4 ケースC：確率的に量子受信機を切り替える場合

ケースBのように， R によって利用できる量子受信機の切り替えを行う手法は，各受信機の個々のロバスト性にのみ頼っている．もし，利用できる量子受信機の種類はそのままとして，複数の量子受信機を確率的に切り替えて使うだけで改善があれば，少しの労力で改善が見込めるという点で有望である．ここでは，ケースCとして，2つの量子受信機を確率的に切り替える場合を考える．

2つの量子受信機のうち，1つはケースBで採用される最良な受信機である．これを改めて Π_B と表す． S を小さくするという意味で性能が改善されるためには，もう1つの受信機の S は，式(5.7)のミニマックス値（これを \bar{S} とおく）を取る端点において， \bar{S} より小さい値である必要がある．このような受信機の候補の中で，ケースBの手法で得られる最良の受信機を Π'_B とする．そして， Π_B を確率 c で， Π'_B を確率 $1 - c$ で稼働させた新たな量子受信機を

$$\Pi_C(\Pi_B, \Pi'_B, c) := c\Pi_B + (1 - c)\Pi'_B \quad (5.8)$$

により定義する．ここで，

$$\min_{0 \leq c \leq 1} \max_{\sigma_1^2 \in R} S(\sigma_1^2, \Pi_C(\Pi_B, \Pi'_B, c)) \quad (5.9)$$

を満たす $\Pi_C(\Pi_B, \Pi'_B, c)$ は，この場合の最もロバストな量子受信機である．なお， \bar{S} より小さい値を取るものが無いか，上式の最小化の結果 $c = 1$ の場合は，量子受信機はケースBの場合と同じとなる．前者も $c = 1$ として取り扱

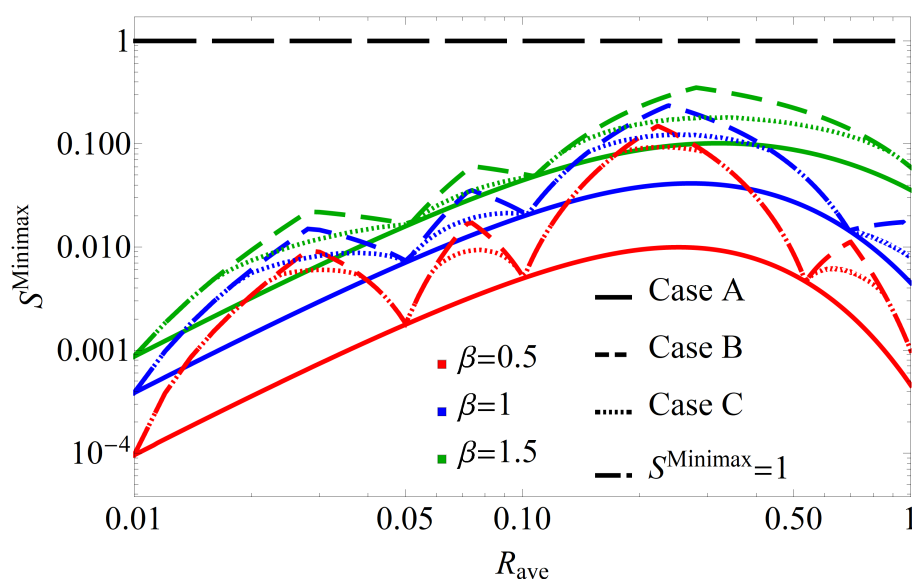


図 5.7: BPSK 信号を受信する場合の R に対して最適な量子受信機を用いたロバスト性

うと、ケースCはケースBを特別な場合として含むということもいえる。なお、ケースCにおいて、2つの量子受信機を見いだす作業は、ケースB同様、端点に注目するだけでよいため、容易である。

5.4.5 結果

前項のケースに応じたロバストな量子受信機の特性を示す際のパラメータとして、位相雑音量の範囲の平均と幅に関するファクタを導入する。まず、位相雑音量 σ_1^2 の範囲 R に対し、 R_{ave} をその平均（中点値）とする。また、 R の幅 W が R_{ave} の何倍かを表すファクタを β とする。このとき、 $W = \beta \cdot R_{\text{ave}}$ である。この β は、 σ_1^2 の見積もりの不確かさを表す量であるといえる。なお、 W は幅であるので非負であり、したがって $\beta \geq 0$ である。また、 R_{ave} が範囲 R の平均であることから、 R は具体的には区間

$$\begin{aligned}
 R &= \left[R_{\text{ave}} - \frac{1}{2}W, R_{\text{ave}} + \frac{1}{2}W \right] \\
 &= \left[\left(1 - \frac{\beta}{2}\right) R_{\text{ave}}, \left(1 + \frac{\beta}{2}\right) R_{\text{ave}} \right]
 \end{aligned}$$

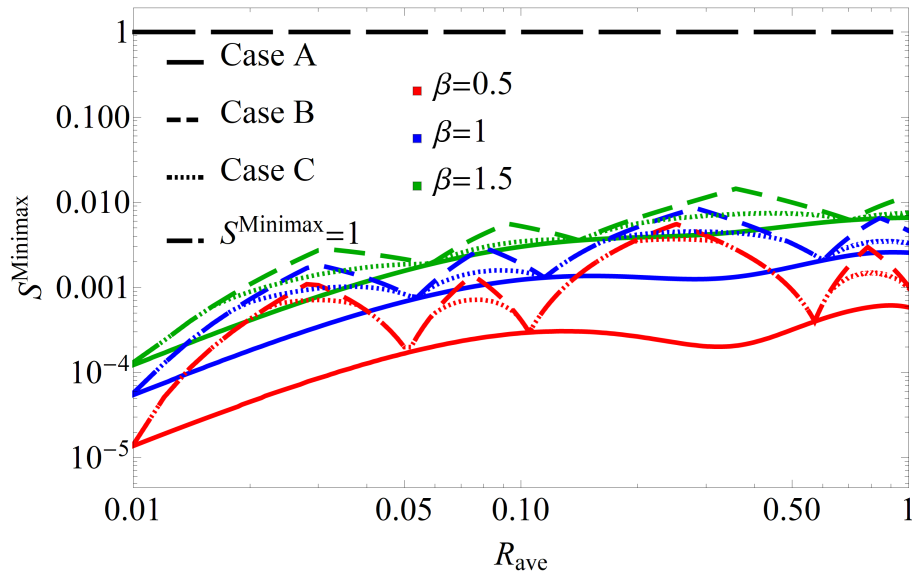


図 5.8: 3PSK 信号を受信する場合の R に対して最適な量子受信機を用いたロバスト性

となるが、 $\sigma_1^2 \geq 0$ より $\beta \leq 2$ である．本研究では、 β の数値例として 0.5, 1, 1.5 の場合を考える．

図 5.7 に、 $|\alpha|^2 = 1$ 、 $M = 2$ とした場合の数値計算結果を示す．利用可能な量子受信機の数 $N = 5$ とし、 $\Sigma_2 = \{0.01, 0.05, 0.10, 0.50, 1.00\}$ とした．実線、破線、点線はそれぞれケース A, ケース B, ケース C に対応し、赤線、青線、緑線はそれぞれ β を 0.5, 1, 1.5 とした場合を表している．また、量子優位性が無くなるレベル、すなわち $S^{\text{Minimax}} = 1$ を黒い破線で表した．

図 5.7 より、3 ケースとも黒い破線を下回っていることから、いずれも量子優位性をもつことがわかる．ケース B (破線) において、各 β に対応する赤線、青線、緑線は、いずれもいくつかのピーク (極大値) があるが、この極大値を境に用いている量子受信機が切り替わっている．量子受信機を切り替えられることで、黒い破線を上回ることがなくなっているともいえ、複数の量子受信機の利用が量子優位性の維持に効果を発揮している．ケース C (点線) は、破線と重なっている部分が多いが、極大値は破線よりも小さい．使う複数の量子受信機はそのまま、単に確率的に使うだけで改善するというので、実現の困難さをほぼ変えずに性能改善が可能であることがわ

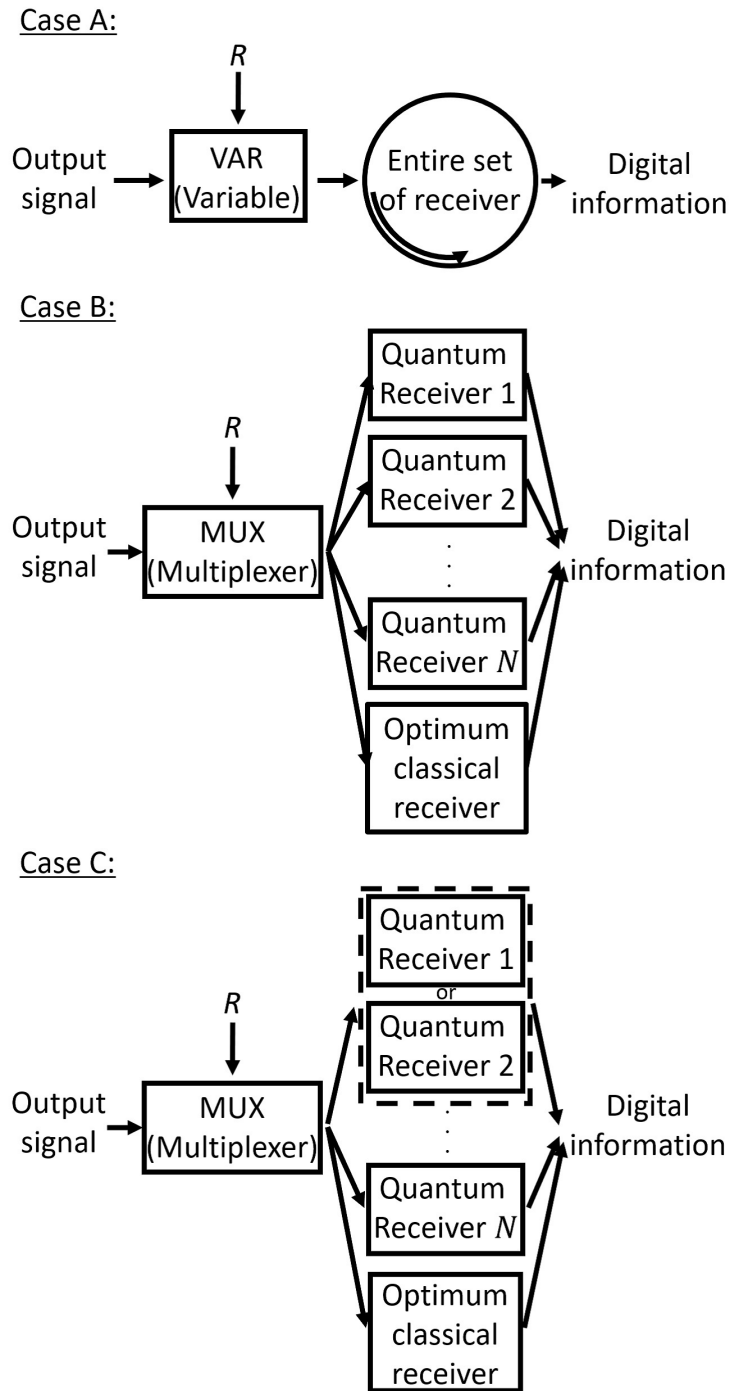


図 5.9: ケース A, B, C に対する量子受信機設計のイメージ図

かる。ケースC（点線）について、赤線、青線、緑線を比較すると、 β が大きいほど、ベストの状況であるケースAに近くなっており、見積もりの不確かさが大きい場合は、確率的に量子受信機を利用するのがより有効であるといえる。

図5.8は $M = 3$ の場合の数値計算結果であり、元数 M 以外のパラメータは図5.7と共通である。図5.8と5.7を比較すると、 $M = 3$ の場合も3ケースとも黒い破線を下回る量子優位性、ケースBにおけるピークを境に量子受信機が切り替わること、ケースCではケースBよりも改善が得られるなどの主要な結果は、 $M = 2$ の場合と同様である。定量的に、 $M = 3$ の方が $M = 2$ よりも量子優位性が大きいが、これは図5.3と5.4のところで述べたのと同様である。

図5.9は、ケースA, B, Cのイメージ図である。ケースAにおける円は量子受信機 ($\in \mathcal{Y}$) と古典最適受信機を含む受信機全体のなす集合である。位相雑音量の範囲 R は与えられるという問題設定であるため、 R に対して最もロバストな量子受信機を1つ選び、信号を測定する。ケースBとCでは、 N 通りの量子受信機 ($\in \mathcal{X}$) と古典最適受信機が準備できることを仮定している。ケースCにおける点線のフレームは、 R によって選ばれた2つの量子受信機を確率的に稼働させることを意味している。ただし、どの2つを稼働させるかは問題によるため、Receiver 1と2を点線で囲んだのは一例を表しただけであり、注意が必要である。3ケースとも、古典最適受信機を含めた理由は、 $S^{\text{Minimax}} > 1$ のとき、古典最適受信機を用いたほうがよいためである。図5.7と5.8の例では $S^{\text{Minimax}} > 1$ となることが無かったが、パラメータによっては、そうなることもあり得る。

ケースA, B, Cの実現難易度としては、Aが最も難しく、BとCは同程度（Cの方が僅かに複雑）である。性能は、ケースAが最も優れているが、ケースBとCとでは、BよりCの方が優れている場合がある。ケースBとCにおいては、利用できる量子受信機を増やすと S^{Minimax} のピークが抑えられ、更には利用できる量子受信機数が無限大の極限がケースAであると考えられることもできる。このため、技術レベルと通信性能への要求のバランスを考え、ケースCに基づき位相雑音量の変動に対してロバストな量子受信機を設計

すればよい.

5.5 おわりに

本章では、位相偏移変調を用いた量子通信システムについて、より現実的な無線通信環境におかれた場合を考え、位相雑音量の変化への追従の可否を分けて量子受信機の誤り率特性を明らかにした。位相雑音量の変化に追従できる場合、量子最適受信機は常に古典最適受信機より優位であるが、位相雑音自体が大きい場合には信号エネルギーを増やしても誤りを軽減することが困難であることがわかった。位相雑音量の変化に追従できず量子受信機で想定している位相雑音量と真の位相雑音量にギャップがあると、量子受信機は古典最適受信機よりも性能低下する場合があります、位相雑音量を正しく見積もることが重要である。最後に、位相雑音量の見積もりに不確かさが存在することを認めた設計を考え、ミニマックス規準に基づき位相雑音量の変化に対してロバストな量子測定を提案し、量子受信機的设计規準を示した。そこで、利用可能な量子受信機のクラスに制約を課さない場合（ケースA）と課す場合（ケースB）、更に後者を改善する場合（ケースC）に分けてロバスト性を評価し考察した。その結果、ケースCはケースBに対する改善法として有効であることがわかった。また、ケースB（あるいはC）が、利用できる量子受信機数が無限大の極限としてケースAを包含するという意味で、より一般的であるといえることから、状況に応じてケースCに基づいた設計を行えばよいといえる。

本研究では位相雑音量が正しく推定できない場合を扱ったが、位相雑音の平均は0に固定し平均が正しく推定できない場合までは扱わなかった。位相を用いた通信においては位相同期が行われるが、位相同期が完璧でない場合は相対的に不規則な位相変動が生じる。この効果は位相雑音と区別できず位相雑音に含めて考えることになるが、位相を合わせようと試みることから簡単にはその平均は0と考えることができ、本研究では平均を0に固定して考えた。平均が0ではなく位相同期のズレが偏るような状況を扱うことは、今後の課題の一つといえる。また、近年、位相雑音環境下におけ

る量子準最適受信機の実現に関する研究が行われている (e.g. [56]) . 本研究における \mathcal{X} について, 量子最適受信機の集合を想定したが, 量子準最適受信機に置き換えても 5.4 節の設計手法は同様にはたらく. 今後の課題として, 文献 [56] など示された量子準最適受信機を用いた場合のロバスト性を評価することなども挙げられる.

第6章 減衰環境における量子イルミネーションの誤り率

本章では、第1章で述べた目標2のとおり、第4章の量子レーダシステムを踏まえて減衰の効果を解析し、量子受信機を用いた量子レーダシステムの性能に対する影響を明らかにする。特に、擬似ベル状態を用いた量子レーダにおいて、減衰がある場合の誤り率の解析解を導出する。

6.1 はじめに

Lloydによって考案された量子イルミネーションは、エンタングルメントを持つ二つの光の利用により、目標の存在を確かめるプロトコルである [21]。このプロトコルでは、エンタングルしている片方（シグナル系：S系）の光を目標に向けて照射し、その反射光が受信機に入力されるようにする。もう片方（アンシラ系：A系）の光は受信機にそのまま入力される。そして、受信機において、両方の光に量子最適測定を施すことで、目標の存在を確かめる。このため、量子イルミネーションは量子レーダとも呼ばれている。

さて、エンタングルメントを持つ量子状態はエンタングルド状態と呼ばれる。エンタングルド状態の中で最も基本的な状態は、ベル状態 [13] である。ベル状態は2次元の量子系において直交する二つの量子状態から構成され、エンタングルメントが最大となる状態（最大エンタングルド状態）である。その次に、無限次元系における連続量に対応するエンタングルド状態である、2モードのガウス状態が考えられた。その代表例として、2モードスクィズド状態 [34] がある。最後に登場したのは、非直交量子状態から構成される擬似ベル状態 [35] である。この状態は、コヒーレント状態などの非直交量子状態で構成されているにもかかわらず、最大エンタングルド状態

(最大擬似ベル状態)となるものがある。応用プロトコルによっては減衰に強い可能性があることが示されており、文献[35]の発表以降、盛んに研究されている(e.g. [57])。また、最大エンタングルメント状態ではない擬似ベル状態(非最大擬似ベル状態)を応用する研究も進められ、量子テレポーテーションなどにおいて最大擬似ベル状態よりも優れた性能を示す報告がなされている(e.g. [58])。

先に述べたとおり、量子イルミネーションは、最初、ベル状態の応用として提案され[21]、続いて、2モードのガウス状態の応用がTanらによって考察された[33]。それに対し、擬似ベル状態の応用としては、量子リーディングにおいて誤りなく動作できる場合がある[59]など、非常にインパクトのある研究が多数なされている。ところが、擬似ベル状態を量子イルミネーションに応用する研究は、ごく最近まで無かった。筆者の所属するグループでは、本研究の予備研究として、平均光子数が1のとき、擬似ベル状態が最も優れた性能をもつ場合があることを数値的に示している[60]。本研究は、擬似ベル状態を用いた量子イルミネーションについて、現実の実験に結びつけるために理論的な解析・計算を行い、パラメータが変化する際の詳細な特性を明らかにすることを目指す。

さて、Tanらの研究は、Lloydのコンセプトをより一般的なモデルへと発展させたものである[33]。そこで、Tanらは物理量の時間空間発展を記述するHeisenberg表示により考察を行った。しかし、Heisenberg表示では、物理量の平均値などを求めることはできるが、量子最適受信機の誤り率などの計算をすることは簡単ではない。そのため、Tanらは量子イルミネーションにおける誤り率を求めるのではなく、その代わりにChernoff限界を求めている。ところが、コストなどによる光パルス数の制約や、動的目標の検出などのより現実的な場面を考えると、無数の光パルスを当てた場合に対応するChernoff限界だけでなく、一発の光パルスを当てた場合の誤り率、という瞬時的な性能評価も望まれる。

以上を踏まえ、本研究ではまず最も基本的な減衰伝送路を扱う。具体的には、ベル状態、2モードのガウス状態、擬似ベル状態の時間空間発展を記述するSchrödinger表示を利用し、それらを用いた量子イルミネーションにつ

いて誤り率規準に基づき性能の評価・比較を行い，誤り率特性を考察する．また，エンタングルド状態ではなく，コヒーレント状態を用いた従来のレーザーレーダとの比較も行う．本研究では，減衰を受けた擬似ベル状態を用いた量子イルミネーションの解析のために，大崎らが示した3元コヒーレント状態信号の3次元ベクトル表現[61]を利用し，まず，誤り率の解析解を導出する．その結果を用い，無減衰の場合に関してはレーザーレーダに対して明確な優位性を持つことを解析的に示す．減衰ありの場合には，解析解を用いた数値特性を様々な減衰率や平均光子数について調べることで，擬似ベル状態を用いた量子イルミネーションがレーザーレーダだけでなく，2モードのガウス状態を用いた量子イルミネーションよりも優位であることを示す．

6.2節では，本研究の主要な結果として，減衰がある場合の誤り率の解析解を示す．6.3節では，擬似ベル状態を用いた量子イルミネーションについて，無減衰の場合は解析的に，減衰ありの場合は数値的に，誤り率規準での優位性を示す．最後に6.4節において，本研究のまとめを示す．

6.2 量子イルミネーションの誤り率解析解の導出

本節では，擬似ベル状態を用いた量子イルミネーションの誤り率の解析解を導出する．まず，ベル状態を用いた量子イルミネーションの誤り率の解析解について述べた後，擬似ベル状態の場合について導出を行う．なお，誤り率の計算は式(4.11)で述べたとおりである．

6.2.1 ベル状態を用いる場合の誤り率

まずはベル状態を用いる場合を考える．qubit系に対し，エネルギー透過率 η に対応する減衰を記述する Kraus 作用素 $\{\hat{E}_i\}$ は以下ようになる[45]．

$$\hat{E}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{\eta} \end{pmatrix}, \quad \hat{E}_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1-\eta} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

これらの Kraus 作用素を用いて、目標が存在する場合の受信量子状態は

$$\hat{\Phi}_{SA}^{(1)} = \sum_{i=0}^1 \left\{ (\hat{E}_i)_S \otimes \hat{I}_A \right\} |\Phi^+\rangle_{SA} \langle \Phi^+| \left\{ (\hat{E}_i)_S \otimes \hat{I}_A \right\}^\dagger \quad (6.2)$$

となる．ここで、誤り率を求めるために、受信量子状態 (4.3), (6.2) を用いて行列表現

$$\hat{\Phi}_{SA}^{(0)} - \hat{\Phi}_{SA}^{(1)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{\eta} & 0 \\ 0 & -\sqrt{\eta} & -\eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

の正の固有値を求めればよい．この固有値は容易に計算でき、減衰が生じる場合、ベル状態を用いた量子イルミネーションの誤り率は以下の通りとなる．

$$P_e^{(\text{Bell})} = \frac{4 - \eta - \sqrt{4\eta + \eta^2}}{8} \quad (6.4)$$

6.2.2 擬似ベル状態を用いる場合の誤り率の導出

次に、最大擬似ベル状態を例にして、擬似ベル状態を用いる場合を考える．式 (4.11) の誤り率を計算するためには、二つの受信量子状態 (4.7) と (4.10) の差 $\hat{\Psi}_{SA}^{(0)} - \hat{\Psi}_{SA}^{(1)}$ に対し固有値を求める必要がある．一般的に、コヒーレント状態は無次元のベクトル、あるいは無次元の行列 (i.e. 密度作用素) で表現される．そのため、コヒーレント状態で構成される擬似ベル状態も無次元の行列となり、 $\hat{\Psi}_{SA}^{(0)} - \hat{\Psi}_{SA}^{(1)}$ の固有値を求めるのは困難である．しかしながら、本研究では特殊な正規直交基底を用いることにより、上記の受信量子状態を 6×6 行列で表現することができることに注目する．さらに、この 6×6 行列表現を用いて $\hat{\Psi}_{SA}^{(0)} - \hat{\Psi}_{SA}^{(1)}$ に対し固有値を導出することにより、擬似ベル状態を用いた量子イルミネーションの誤り率の解析解を導出することができる．

さて、誤り率の解析解を導出するにあたっては、四つのステップに分けて考える．以下に各ステップについて述べる．

Step1：受信量子状態の6×6行列表現

まず、受信量子状態 $\hat{\Psi}_{SA}^{(0)}, \hat{\Psi}_{SA}^{(1)}$ のA系に注目すると、二つのコヒーレント状態 $\{|\pm\alpha\rangle_A\}$ で構成されることがわかる。 $\{|\pm\alpha\rangle\}$ で張られる2次元空間において、文献[61, 62]にて用いられている正規直交基底 $\{|\omega_0\rangle, |\omega_1\rangle\}$ は square-root measurement (SRM)[41] の測定量子状態であり、擬似ベル状態の数ベクトルや、その密度作用素の行列表現においてもしばしば採用され、議論の見通しが良くなることが知られている[63, 64]。 $\{|\pm\alpha\rangle_A\}$ に対するSRMは、誤り率を最小にする量子最適測定であり、これらの測定量子状態を用いることにより、 $\{|\pm\alpha\rangle_A\}$ を以下のように表すことができる。

$$|\pm\alpha\rangle_A = \frac{1}{\varepsilon_+ - \varepsilon_-} (\sqrt{\varepsilon_{\pm}}|\omega_0\rangle_A - \sqrt{\varepsilon_{\mp}}|\omega_1\rangle_A) \quad (6.5)$$

したがって、 $\{|\pm\alpha\rangle_A\}$ は以下のようにベクトル表現される。

$$|\pm\alpha\rangle_A = \frac{1}{\varepsilon_+ - \varepsilon_-} \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon_{\pm}} \\ -\sqrt{\varepsilon_{\mp}} \end{pmatrix} \quad (6.6)$$

ただし、 $\kappa_A = \kappa_S =: \kappa$ として、 ε_{\pm} は以下の通りである。

$$\varepsilon_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \kappa^2}}{2(1 - \kappa^2)} \quad (6.7)$$

次に、受信量子状態 $\hat{\Psi}_{SA}^{(0)}, \hat{\Psi}_{SA}^{(1)}$ のS系に注目すると、三つのコヒーレント状態 $\{|0\rangle_S, |\sqrt{\eta}\alpha\rangle_S, |-\sqrt{\eta}\alpha\rangle_S\}$ で構成されることがわかる。この3元信号に対する量子最適測定の導出は、文献[61]に示されている。同文献により、量子最適測定の測定量子状態 $\{|\chi_0\rangle, |\chi_1\rangle, |\chi_2\rangle\}$ を正規直交基底とした、3元信号は以下のように表すことができる。

$$\begin{pmatrix} |0\rangle_S \\ |\sqrt{\eta}\alpha\rangle_S \\ |-\sqrt{\eta}\alpha\rangle_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & d & d \\ b & c & e \\ b & e & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\chi_0\rangle \\ |\chi_1\rangle \\ |\chi_2\rangle \end{pmatrix} \quad (6.8)$$

ただし, a, b, c, d, e は実数である. そのうち,

$$a = \frac{2k_S b + (1 - k_S^2) \sqrt{1 + k_S^4 - 2b^2}}{1 + k_S^4} \quad (6.9)$$

$$c = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + k_S^4 - 2b^2} + \sqrt{1 - k_S^4} \right) \quad (6.10)$$

$$d = \frac{k_S \sqrt{1 + k_S^4 - 2b^2} - b(1 - k_S^2)}{1 + k_S^4} \quad (6.11)$$

$$e = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + k_S^4 - 2b^2} - \sqrt{1 - k_S^4} \right) \quad (6.12)$$

は b についての解として文献 [8] に与えられている. ただし, $k_S = \langle 0 | \sqrt{\eta} \alpha \rangle = \langle 0 | -\sqrt{\eta} \alpha \rangle = e^{-\frac{\eta}{2} |\alpha|^2}$ である. b は文献 [61] の手法により求められる.

$$b = \begin{cases} \frac{2k_S \sqrt{1 - k_S^4} + \sqrt{k_S^2(2 + k_S^2)(2k_S^2 + k_S^4 - 1)^2}}{1 + 4k_S^2 + k_S^4} & (\eta |\alpha|^2 \leq E_{\text{th}}) \\ \frac{2k_S \sqrt{1 - k_S^4} - \sqrt{k_S^2(2 + k_S^2)(2k_S^2 + k_S^4 - 1)^2}}{1 + 4k_S^2 + k_S^4} & (\eta |\alpha|^2 > E_{\text{th}}) \end{cases} \quad (6.13)$$

ただし, $E_{\text{th}} = \ln [1 + \sqrt{2}]$ である. さて, 前述した 3 元信号は以下のようにベクトル表現される.

$$|0\rangle_S = \begin{pmatrix} a \\ d \\ d \end{pmatrix}, |\sqrt{\eta} \alpha\rangle_S = \begin{pmatrix} b \\ c \\ e \end{pmatrix}, |-\sqrt{\eta} \alpha\rangle_S = \begin{pmatrix} b \\ e \\ c \end{pmatrix} \quad (6.14)$$

最後に, 式 (6.6), (6.14) を式 (4.7), (4.10) に代入して, 両受信量子状態の差 ($\hat{\Psi}_{\text{SA}}^{(0)} - \hat{\Psi}_{\text{SA}}^{(1)} =: M$) を取ると, 6×6 行列表現

$$M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A & B & C_+ & D_+ & C_- & D_- \\ B & A & D_- & C_- & D_+ & C_+ \\ C_+ & D_- & E_+ & F & G & H_- \\ D_+ & C_- & F & E_- & H_+ & G \\ C_- & D_+ & G & H_+ & E_- & F \\ D_- & C_+ & H_- & G & F & E_+ \end{pmatrix} \quad (6.15)$$

が得られる．ただし， $L = e^{-2(1-\eta)|\alpha|^2}$ として，

$$A = a^2 - b^2 (\varepsilon_- + \varepsilon_+ - 2L\sqrt{\varepsilon_-}\sqrt{\varepsilon_+}) \quad (6.16)$$

$$B = -b^2 \{(\varepsilon_- + \varepsilon_+)L - 2\sqrt{\varepsilon_-}\sqrt{\varepsilon_+}\} \quad (6.17)$$

$$C_{\pm} = ad - b \{(c\varepsilon_{\pm} + e\varepsilon_{\mp}) - L(c + e)\sqrt{\varepsilon_-}\sqrt{\varepsilon_+}\} \quad (6.18)$$

$$D_{\pm} = b \{(c + e)\sqrt{\varepsilon_-}\sqrt{\varepsilon_+} - L(c\varepsilon_{\mp} + e\varepsilon_{\pm})\} \quad (6.19)$$

$$E_{\pm} = d^2 - c^2\varepsilon_{\pm} - e^2\varepsilon_{\mp} + 2ceL\sqrt{\varepsilon_-}\sqrt{\varepsilon_+} \quad (6.20)$$

$$F = (c^2 + e^2) \sqrt{\varepsilon_-}\sqrt{\varepsilon_+} - ceL(\varepsilon_- + \varepsilon_+) \quad (6.21)$$

$$G = d^2 + L(c^2 + e^2) \sqrt{\varepsilon_-}\sqrt{\varepsilon_+} - ce(\varepsilon_- + \varepsilon_+) \quad (6.22)$$

$$H_{\pm} = 2ce\sqrt{\varepsilon_-}\sqrt{\varepsilon_+} - L(c^2\varepsilon_{\mp} + e^2\varepsilon_{\pm}) \quad (6.23)$$

はすべて実数のため， M は実対称行列であることがわかる．

Step2 : 6×6 行列に対する相似変換

これから， 6×6 実対称行列 M の固有値の導出を考える．5 次以上の正方行列の固有値はガロア理論により一般解が存在しないが，本研究では M の対称構造をうまく利用することで， M の固有値を導出する．

さて， M の対称構造を利用するために，準備としてまず M を取り扱いやすい形に変換する． M をある正則行列 P を用いて $P^{-1}MP =: M'$ へと変換したとき， M と M' の固有値が等しくなることは，行列の相似変換として知られている．ここで，以下の正則行列

$$P = P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.24)$$

を用いて M の相似変換を行うと、相似変換後の行列

$$\begin{aligned}
 M' &= P^{-1}MP \\
 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A & B & C_+ & D_- & C_- & D_+ \\ B & A & D_- & C_+ & D_+ & C_- \\ C_+ & D_- & E_+ & H_- & G & F \\ D_- & C_+ & H_- & E_+ & F & G \\ C_- & D_+ & G & F & E_- & H_+ \\ D_+ & C_- & F & G & H_+ & E_- \end{pmatrix} \quad (6.25)
 \end{aligned}$$

が得られる。

Step3 : 6×6 行列に対するスペクトル分解

M' を観察すると、

$$M^{(2)}(u, v) = \begin{pmatrix} u & v \\ v & u \end{pmatrix} \quad (6.26)$$

のような同じ構造を持つ 2×2 実対称行列を用いてブロック分割できることがわかる。 $M^{(2)}(u, v)$ の固有値と固有ベクトルは、よく知られているように、

$$\begin{aligned}
 x_1 &= u + v, & x_2 &= u - v \\
 |x_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, & |x_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \quad (6.27)$$

となる。ただし、 $|x_1\rangle$ と $|x_2\rangle$ は量子状態ベクトルではなく、単なる 2次元数ベクトルである。これらを用いて $M^{(2)}(u, v)$ のスペクトル分解は

$$M^{(2)}(u, v) = (u + v)|x_1\rangle\langle x_1| + (u - v)|x_2\rangle\langle x_2| \quad (6.28)$$

となる。この $M^{(2)}(u, v)$ を用いて、 M' は

$$M' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} M^{(2)}(A, B) & M^{(2)}(C_+, D_-) & M^{(2)}(C_-, D_+) \\ M^{(2)}(C_+, D_-) & M^{(2)}(E_+, H_-) & M^{(2)}(G, F) \\ M^{(2)}(C_-, D_+) & M^{(2)}(G, F) & M^{(2)}(E_-, H_+) \end{pmatrix} \quad (6.29)$$

のようにブロック分割される．式(6.28)のスペクトル分解形式を上式に代入すると，

$$M' = \frac{1}{2} (M^{(+)} \otimes |x_1\rangle\langle x_1| + M^{(-)} \otimes |x_2\rangle\langle x_2|) \quad (6.30)$$

となることがわかる．ただし，

$$M^{(+)} = \begin{pmatrix} A+B & C_+ + D_- & C_- + D_+ \\ C_+ + D_- & E_+ + H_- & G + F \\ C_- + D_+ & G + F & E_- + H_+ \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} x_{1,1}^{(+)} & x_{1,2}^{(+)} & x_{1,3}^{(+)} \\ x_{1,2}^{(+)} & x_{2,2}^{(+)} & x_{2,3}^{(+)} \\ x_{1,3}^{(+)} & x_{2,3}^{(+)} & x_{3,3}^{(+)} \end{pmatrix} \quad (6.31)$$

$$M^{(-)} = \begin{pmatrix} A-B & C_+ - D_- & C_- - D_+ \\ C_+ - D_- & E_+ - H_- & G - F \\ C_- - D_+ & G - F & E_- - H_+ \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} x_{1,1}^{(-)} & x_{1,2}^{(-)} & x_{1,3}^{(-)} \\ x_{1,2}^{(-)} & x_{2,2}^{(-)} & x_{2,3}^{(-)} \\ x_{1,3}^{(-)} & x_{2,3}^{(-)} & x_{3,3}^{(-)} \end{pmatrix} \quad (6.32)$$

もまた，実対称行列となる．任意の実対称行列はスペクトル分解可能のため， $M^{(+)}$, $M^{(-)}$ の固有値と固有ベクトルをそれぞれ， $\{\lambda_l^{(+)}\}$, $\{\lambda_l^{(-)}\}$ と $\{|\lambda_l^{(+)}\rangle\}$, $\{|\lambda_l^{(-)}\rangle\}$ と書くと，

$$M^{(+)} = \sum_{l=1}^3 \lambda_l^{(+)} |\lambda_l^{(+)}\rangle\langle\lambda_l^{(+)}| \quad (6.33)$$

$$M^{(-)} = \sum_{l=1}^3 \lambda_l^{(-)} |\lambda_l^{(-)}\rangle\langle\lambda_l^{(-)}| \quad (6.34)$$

となる．これらを式(6.30)に代入すると，

$$M' = \frac{1}{2} \left(\sum_{l=1}^3 \lambda_l^{(+)} |\lambda_l^{(+)}\rangle\langle\lambda_l^{(+)}| \otimes |x_1\rangle\langle x_1| + \sum_{l=1}^3 \lambda_l^{(-)} |\lambda_l^{(-)}\rangle\langle\lambda_l^{(-)}| \otimes |x_2\rangle\langle x_2| \right) \quad (6.35)$$

が得られる．ここで， M' の固有値は以下の通りである．

$$\frac{1}{2}\lambda_l^{(+)}, \quad \frac{1}{2}\lambda_l^{(-)}, \quad l = \{1, 2, 3\} \quad (6.36)$$

Step4 : 3×3 行列の固有値

式(6.36)で示された固有値を求めるために， 3×3 実対称行列 $M^{(+)}$, $M^{(-)}$ の固有値 $\{\lambda_l^{(+)}\}$, $\{\lambda_l^{(-)}\}$ を求める必要がある． 3×3 実対称行列の固有値は，カルダノの公式を用い，次のように導出できる．

3×3 実対称行列 $M^{(+)}$ の固有値 $\{\lambda_l^{(+)}\}$ は, I を単位行列として, 固有方程式 $\det(M^{(+)} - \lambda^{(+)}I) = 0$ の $\lambda^{(+)}$ についての解である.

$$\det(M^{(+)} - \lambda^{(+)}I) = -\lambda^{(+)^3} + \Lambda\lambda^{(+)^2} + \Xi\lambda^{(+)} + \Upsilon \quad (6.37)$$

ただし,

$$\Lambda = x_{1,1}^{(+)} + x_{2,2}^{(+)} + x_{3,3}^{(+)} \quad (6.38)$$

$$\Xi = x_{1,2}^{(+)^2} + x_{1,3}^{(+)^2} - x_{1,1}^{(+)}x_{2,2}^{(+)} + x_{2,3}^{(+)^2} - x_{1,1}^{(+)}x_{3,3}^{(+)} - x_{2,2}^{(+)}x_{3,3}^{(+)} \quad (6.39)$$

$$\Upsilon = -x_{1,3}^{(+)^2}x_{2,2}^{(+)} + 2x_{1,2}^{(+)}x_{1,3}^{(+)}x_{2,3}^{(+)} - x_{1,1}^{(+)}x_{2,3}^{(+)^2} - x_{1,2}^{(+)^2}x_{3,3}^{(+)} + x_{1,1}^{(+)}x_{2,2}^{(+)}x_{3,3}^{(+)} \quad (6.40)$$

である. ここで, カルダノの公式より

$$\Omega_0 = \Lambda^2 + 3\Xi \quad (6.41)$$

$$\Omega_1 = 2\Lambda^3 + 9\Lambda\Xi + 27\Upsilon \quad (6.42)$$

$$\Theta = \sqrt[3]{\frac{\Omega_1 + \sqrt{\Omega_1^2 - 4\Omega_0^3}}{2}} \quad (6.43)$$

として, $\{\lambda_l^{(+)}\}$ は

$$\lambda_l^{(+)} = \frac{1}{3} \left(\Lambda + \mu^{l-1}\Theta + \frac{\Omega_0}{\mu^{l-1}\Theta} \right), \quad l = \{1, 2, 3\} \quad (6.44)$$

となる. ただし, $\mu = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$ である. $M^{(-)}$ の固有値 $\{\lambda_l^{(-)}\}$ についても同様に求められる. また, $M^{(+)}, M^{(-)}$ は実対称行列であるため, 以上で求められた固有値はすべて実数である.

誤り率解析解の導出

式 (6.44) で得られた $\{\lambda_l^{(+)}\}, \{\lambda_l^{(-)}\}$ を式 (6.36) に代入すれば M' , つまり M の固有値を求めることができる. ここで, 直接的な計算により, $\Upsilon = 0$ で, $\lambda_1^{(+)}, \lambda_1^{(-)} > 0, \lambda_2^{(+)}, \lambda_2^{(-)} \leq 0, \lambda_3^{(+)}, \lambda_3^{(-)} = 0$ であることを確認できるため, 最終的に, 最大擬似ベル状態を用いた量子イルミネーションの誤り率 $P_e^{(\text{Max})}$ は以下の通りとなる.

$$P_e^{(\text{Max})} = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{6} \left(\Theta_M^{(+)} + \frac{\Omega_{(0,M)}^{(+)}}{\Theta_M^{(+)}} + \Theta_M^{(-)} + \frac{\Omega_{(0,M)}^{(-)}}{\Theta_M^{(-)}} \right) \right\} \quad (6.45)$$

ただし,

$$\Theta_M^{(\pm)} = \sqrt[3]{\frac{\Omega_{(1,M)}^{(\pm)} + \sqrt{\Omega_{(1,M)}^{(\pm)2} - 4\Omega_{(0,M)}^{(\pm)3}}}{2}} \quad (6.46)$$

$$\Omega_{(0,M)}^{(\pm)} = \Lambda_M^{(\pm)2} + 3\Xi_M^{(\pm)} \quad (6.47)$$

$$\Omega_{(1,M)}^{(\pm)} = 2\Lambda_M^{(\pm)3} + 9\Lambda_M^{(\pm)}\Xi_M^{(\pm)} \quad (6.48)$$

$$\Lambda_M^{(\pm)} = \pm \frac{(k_S^8 - 1)L}{1 - \kappa^2} \quad (6.49)$$

$$\Xi_M^{(\pm)} = \frac{(k_S^2 - 1)(L \pm 1)(k_S^2 \kappa \pm 1)}{\kappa^2 - 1} \quad (6.50)$$

である.

非最大擬似ベル状態を用いた量子イルミネーションの誤り率 $P_e^{(\text{NonMax})}$ も, 最大擬似ベル状態の場合と同様に, Step1~4により求められる. 結果として,

$$P_e^{(\text{NonMax})} = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{1 - \kappa^2}{6(1 + \kappa^2)} \left(\Theta_N^{(+)} + \frac{\Omega_{(0,N)}^{(+)}}{\Theta_N^{(+)}} + \Theta_N^{(-)} + \frac{\Omega_{(0,N)}^{(-)}}{\Theta_N^{(-)}} \right) \right\} \quad (6.51)$$

ただし,

$$\Theta_N^{(\pm)} = \sqrt[3]{\frac{\Omega_{(1,N)}^{(\pm)} + \sqrt{\Omega_{(1,N)}^{(\pm)2} - 4\Omega_{(0,N)}^{(\pm)3}}}{2}} \quad (6.52)$$

$$\Omega_{(0,N)}^{(\pm)} = \Lambda_N^{(\pm)2} + 3\Xi_N^{(\pm)} \quad (6.53)$$

$$\Omega_{(1,N)}^{(\pm)} = 2\Lambda_N^{(\pm)3} + 9\Lambda_N^{(\pm)}\Xi_N^{(\pm)} \quad (6.54)$$

$$\Lambda_N^{(\pm)} = \pm \frac{(k_S^4 - 1)^2 L}{1 - \kappa^2} \quad (6.55)$$

$$\Xi_N^{(\pm)} = \frac{(k_S^2 - 1)(L \mp 1)(k_S^2 \kappa \pm 1)}{(\kappa \pm 1)^2} \quad (6.56)$$

である.

6.3 量子イルミネーションの誤り率特性

本節では, 擬似ベル状態を用いた量子イルミネーションの誤り率特性を示す. まず, 無減衰の場合について, 前節の解析解を用いてレーザーレーダ

に対する優位性を解析的に示す。次いで、減衰がある場合については、前節の解析解を用いて誤り率の数値特性を調べ、最大あるいは非最大の擬似ベル状態を適切に選ぶことにより、擬似ベル状態を用いた量子イルミネーションが、レーザーレーダよりも常に優れており、2モードのガウス状態を用いた量子イルミネーションと比べると平均光子数が小さく減衰が大きい場合に同程度、その他の状況では明確に優れていることを示す。

6.3.1 無減衰の場合

本項では、減衰伝送路の中で最も基本的な無減衰伝送路、つまり $\eta = 1$ の場合を扱う。この場合、最大擬似ベル状態を用いた量子イルミネーションが、レーザーレーダよりも常に優れていることを解析的に示すことができる。

無減衰伝送路において、最大擬似ベル状態を用いた量子イルミネーションの誤り率 $P_e^{(\text{lossless})}$ は、 $P_e^{(\text{lossless})} = P_e^{(\text{Max})}|_{\eta=1, \kappa=k_S^4}$ により以下のように表せる。

$$P_e^{(\text{lossless})} = \frac{3k_S^4 - \sqrt{(k_S^4 + 1)(9k_S^4 - 8k_S^2 + 9)} + 3}{8(k_S^4 + 1)} \quad (6.57)$$

量子イルミネーションとレーザーレーダの比較のため、両者が同エネルギーの場合を比較するべきであり、本研究でもその通常の方針を踏襲する。このとき、最大擬似ベル状態の平均光子数 $\langle n \rangle_{\text{Max}} (= |\alpha|^2 \coth(2|\alpha|^2))$ とコヒーレント状態の平均光子数 $\langle n \rangle_{\text{Coh}} (= |\alpha|^2)$ は、同じ $|\alpha|$ に対して $\langle n \rangle_{\text{Coh}} < \langle n \rangle_{\text{Max}}$ の関係をもつことを注意する必要がある。よって、同じ $|\alpha|$ に対するレーザーレーダと量子イルミネーションの誤り率 $P_e^{(\text{LR})}|_{\eta=1}$ と $P_e^{(\text{lossless})}$ をそのまま比較することはできない。もしそのまま比較すれば、レーザーレーダは利用するエネルギーが少ないという意味で不利になってしまう。ゆえに、本項では次のような方針で比較を行う。 $\langle n \rangle'_{\text{Coh}} = |\alpha|^2 + \frac{1}{2} \geq \langle n \rangle_{\text{Max}}$ の関係に着目し、コヒーレント状態に最大擬似ベル状態よりも大きな平均光子数 $\langle n \rangle'_{\text{Coh}}$ をもたせた場合であっても、 $P_e^{(\text{LR})}|_{\eta=1}(\langle n \rangle'_{\text{Coh}}) > P_e^{(\text{lossless})}(\langle n \rangle_{\text{Max}})$ が真であることを示せれば、平均光子数が同じ場合においても量子イルミネーションが優位であるといえる。

次に、方針に従って以下の不等式が真であることを示す。

$$P_e^{(\text{LR})}|_{\eta=1}(\langle n \rangle'_{\text{Coh}}) - P_e^{(\text{lossless})}(\langle n \rangle_{\text{Max}}) > 0 \quad (6.58)$$

ただし、

$$P_e^{(\text{LR})}|_{\eta=1}(\langle n \rangle'_{\text{Coh}}) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left[\sqrt{\frac{|\alpha|^2 + \frac{1}{2}}{2}} \right] \quad (6.59)$$

$$P_e^{(\text{lossless})}(\langle n \rangle_{\text{Max}}) = P_e^{(\text{lossless})} = \frac{3k_S^4 - T + 3}{8(k_S^4 + 1)} \quad (6.60)$$

$$T = \sqrt{(k_S^4 + 1)(9k_S^4 - 8k_S^2 + 9)} \quad (6.61)$$

である。相補誤差関数 $\operatorname{erfc}[z]$ に関する不等式 [65]

$$\operatorname{erfc}[z] > \frac{4e^{-z^2}}{\sqrt{\pi}(z + \sqrt{z^2 + 2})} \quad (6.62)$$

を用いて上式は

$$\frac{4k_S}{\sqrt[4]{e}\sqrt{\pi}W} - \frac{3k_S^4 - T + 3}{8(k_S^4 + 1)} > 0 \quad (6.63)$$

となる。ただし、 $W = \sqrt{1 - 4\ln[k_S]} + \sqrt{9 - 4\ln[k_S]}$ である。上式を整理すると以下の不等式が得られる。

$$32(k_S^5 + k_S) + \sqrt[4]{e}\sqrt{\pi}(T - 3 - 3k_S^4)W > 0 \quad (6.64)$$

ここで、 $T - 3 - 3k_S^4 < 0$ のため、シュワルツの不等式とネイピアの不等式

$$W \leq 2\sqrt{5 - 4\ln[k_S]} < 2\sqrt{1 + \frac{4}{k_S}} =: X \quad (6.65)$$

により、上式を

$$32(k_S^5 + k_S) + \sqrt[4]{e}\sqrt{\pi}(T - 3 - 3k_S^4)X =: Y > 0 \quad (6.66)$$

に書き換えても差し支えない。Y の導関数を Y' として、 $k_S \in (0, 1)$ において $Y' > 0$ であることを確認でき、Y は単調増加であることがわかる。 $k_S \rightarrow 0$ のときに、 $Y \rightarrow 0$ と、 $k_S \rightarrow 1$ のときに、 $Y \approx 48$ となるため、 $Y > 0$ は真であり、不等式 (6.58) は真であることがわかる。

以上より、無減衰伝送路において、レーザーレーダの誤り率に比べて、最大擬似ベル状態を用いた量子イルミネーションは常に優位であることがわかる。

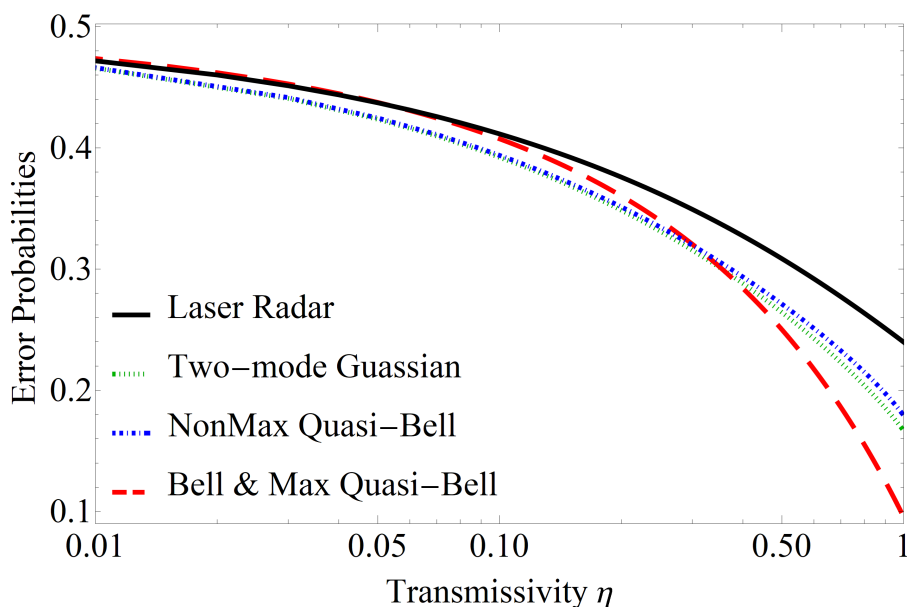


図 6.1: 透過率 η を変化させたときの誤り率. 平均光子数が 0.5 の場合

6.3.2 減衰がある場合

本項では無減衰伝送路を特殊な場合として包含する減衰伝送路を扱い、数値的に得られることがらを示す. なお, 2モードのガウス状態を用いる場合は, 通常の数値的計算手法, つまり式 (2.30) を有限の n までに近似した式を元に計算を行う. そこでは 3.2 節や文献 [66] 同様に, 取り扱う平均光子数や誤り率のオーダーを勘案して, 適切な n で打ち切り設定することとする.

図 6.1 に, ベル状態の送信時の光子数 $\langle n \rangle_{\text{Bell}} = 0.5$ に合わせ, 2モードのガウス状態, 最大擬似ベル状態, 非最大擬似ベル状態, コヒーレント状態の送信時の平均光子数を $\langle n \rangle_{\text{Gauss}} = \langle n \rangle_{\text{Max}} = \langle n \rangle_{\text{NonMax}} = \langle n \rangle_{\text{Coh}} = 0.5$ として固定し, 透過率 η を 0.01 から 1 まで変化させたときの誤り率を示す. 黒色の実線, 緑色の点線, 青色の鎖線, 赤色の破線はそれぞれ, レーザーレーダ, つまりコヒーレント状態に対してホモダイン測定を適用したとき, 2モードのガウス状態を用いたとき, 非最大擬似ベル状態を用いたとき, 最大擬似ベル状態 ($\langle n \rangle_{\text{Max}} = 0.5$ の場合は, ベル状態に一致 [57]) を用いたときの誤り率を表している. 横軸は透過率, 縦軸は誤り率を表している. なお, 上記の最

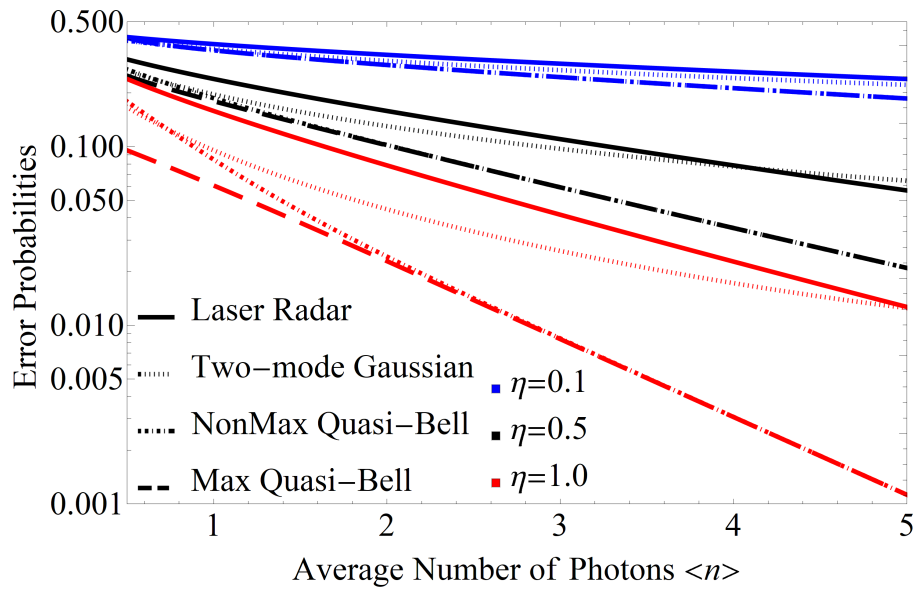


図 6.2: 平均光子数を 0.5 から 5 まで変化させたときの誤り率. 透過率 η をそれぞれ 0.1, 0.5, 1 として固定した場合

大と非最大擬似ベル状態の誤り率の計算には, 前章に示した誤り率の解析解を用いている.

図 6.1 より, 適切に状態を選べば, 量子イルミネーションは, いずれの透過率の場合もレーザーレーダよりも低い誤り率を達成できることがわかる. 各状態について細かく見ると, $\eta < 0.05$ のとき, 最大擬似ベル状態はレーザーレーダに及ばない. しかしながら, そのとき, 非最大擬似ベル状態がレーザーレーダよりも優位である. したがって, 適切に擬似ベル状態を選ぶことにより, 量子イルミネーションは, レーザーレーダよりも常に優位であるといえる. また, 最大擬似ベル状態の優位性は, η が大きくなるにつれて顕著になってくる. $\eta \leq 0.35$ のとき, 最大と非最大擬似ベル状態に比べて 2 モードのガウス状態を用いた場合がわずかに優位であるが, $\eta > 0.35$ のとき, 最大擬似ベル状態の方が優位である.

図 6.2 に, 透過率 η をそれぞれ 0.1, 0.5, 1 として固定し¹, 2 モードのガウ

¹レーザー光の大気中伝送時の減衰はレーザー光の波長や天候などに関わる. 参考として炭酸ガスレーザー (波長 $10.6\mu\text{m}$) 利用時 [67, 68] の大気による減衰と測定距離との大まかな目安を示す. ただし, 測定距離はレーザーレーダから目標までの距離のことである

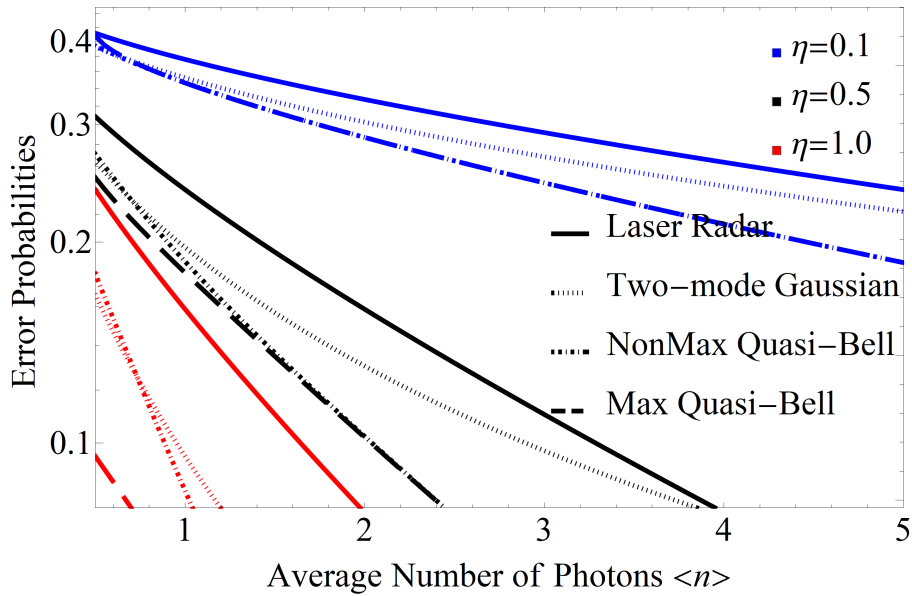


図 6.3: 図 6.2 における誤り率の大きいところの詳細

ス状態，最大擬似ベル状態，非最大擬似ベル状態を用いた量子イルミネーションとレーザーレーダについて，平均光子数 $\langle n \rangle$ を 0.5 から 5 まで変化させたときの誤り率を示す．実線はレーザーレーダ，点線，鎖線，破線はそれぞれ，2モードのガウス状態，非最大擬似ベル状態，最大擬似ベル状態を用いた量子イルミネーションの誤り率を表している．青線，黒線，赤線はそれぞれ，透過率 η を 0.1，0.5，1 とした場合を表している．横軸は平均光子数，縦軸は誤り率である．なお，図 6.2 における最小の平均光子数が 0.5 であるのは，最大擬似ベル状態の最小平均光子数が $\langle n \rangle_{\text{Max}} = 0.5$ であり，それよりも小さい場合が定義されないためである．最大の平均光子数を 5 としたのは，固有値を数値計算する際に，2モードのガウス状態の密度作用素の行列サイズが $40^2 \times 40^2$ を超え，計算が困難であるからである．また，図 6.3 は，図 6.2 において誤り率の大きいところの詳細を示すものである．

図 6.2 より，レーザーレーダに比べて，図 6.1 同様に，適切に状態を選べ

り，往復のため実際の光の伝送距離は測定距離の 2 倍である．快晴時と反射率が 1 の目標 (e.g. 理想的な正反射板) を考える場合， $\eta = 0.1$ は 9.3km 程度に， $\eta = 0.5$ は 2.8km 程度に， $\eta = 1$ は 0.1km 以内に対応している．

ば量子イルミネーションが優位であることがわかる。ここでも各状態について細かく見ると、平均光子数 $\langle n \rangle$ を大きくすると、2モードのガウス状態を用いた量子イルミネーションの誤り率は、レーザーレーダに逆転されてしまう。逆転される平均光子数は、無減衰の場合がもっとも大きく5程度であり、減衰がある場合はそれよりも小さな平均光子数となる。このように、2モードのガウス状態を用いた量子イルミネーションがレーザーレーダと比べて優位であるのは、平均光子数が小さい場合に限られることがわかる。これは、レーザーレーダに比べて、2モードのガウス状態を用いた量子イルミネーションのほうが優位にある場合があることを主張していた Tan らの研究 [33, 46] の結果とは矛盾しない。彼らは、Chernoff 限界を用い、透過率 $0 < \eta \ll 1$ 、平均光子数 $\langle n \rangle \ll 1$ 、平均熱雑音光子数 $\langle n \rangle_T \gg 1$ という限られた条件で解析を行っている。図 6.2 より、Tan らの条件を外すと、2モードのガウス状態の利用が常に有効であるわけではないことがわかる。

擬似ベル状態を利用する場合は、最大と非最大の擬似ベル状態を適切に選ぶことにより、常に量子イルミネーションはレーザーレーダよりも優れている。特に、最大擬似ベル状態は、透過率が小さい場合を除き、もっとも誤り率が小さい。なお、 $\langle n \rangle$ が大きくなると、最大擬似ベル状態と非最大擬似ベル状態の差が小さくなり、どちらの擬似ベル状態を用いても大差はなくなることをわかる。

また、2.3 節でも述べたとおり、2モードのガウス状態は平均光子数が大きいと無制限にエンタングルメント測度の値が大きくなるが、擬似ベル状態では、いくら平均光子数が大きくてもエンタングルメント測度は 1 ebit を超えない。したがって、平均光子数が大きいときは2モードのガウス状態のエンタングルメントの方が擬似ベル状態よりも圧倒的に大きい、量子イルミネーションの性能は後者が圧倒的に良いという結果となっていることがわかる。

図 6.4 は、2モードのガウス状態以外について、より大きな平均光子数まで誤り率を計算した結果である。透過率 η をそれぞれ 0.1, 0.5, 1 として固定し、平均光子数 $\langle n \rangle$ を 0.5 から 50 まで変化させた。実線はレーザーレーダ、鎖線と破線はそれぞれ、非最大と最大擬似ベル状態を用いた量子イルミネー

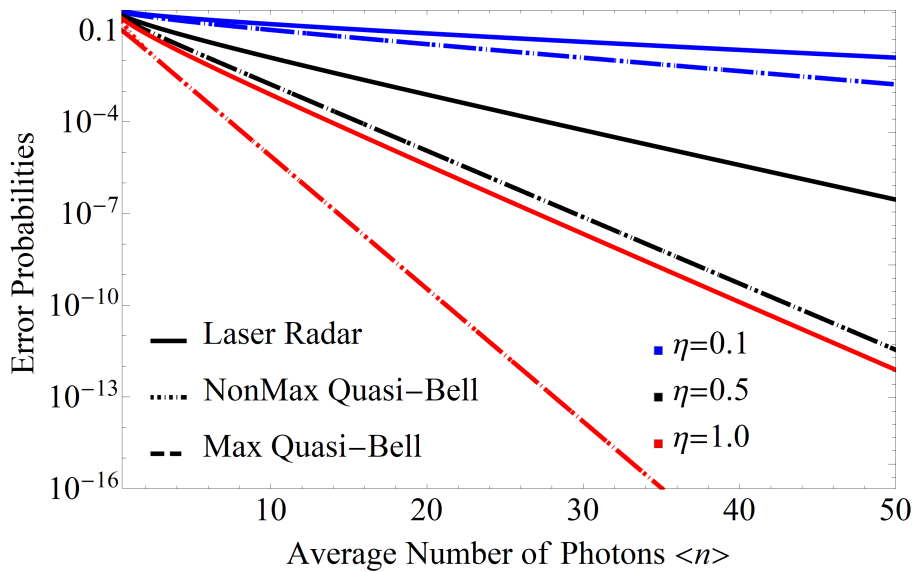


図 6.4: 平均光子数を 0.5 から 50 まで変化させたときの誤り率. 透過率 η をそれぞれ 0.1, 0.5, 1 として固定した場合

シヨンの誤り率を表している. 青線, 黒線, 赤線はそれぞれ, 透過率 η を 0.1, 0.5, 1 とした場合を表している. 横軸は平均光子数, 縦軸は誤り率を表している.

図 6.4 より, 平均光子数を大きくしても, レーザーレーダに対して擬似ベル状態による量子イルミネーションが明確な優位性をもつことがわかる. このように, 平均光子数を増やしても定性的に変わらないため, 応用先に合わせ, 所望の誤り率を達成する平均光子数で運用するとよい.

6.4 おわりに

本章では, 擬似ベル状態を用いた量子イルミネーションにおいて, S (シグナル) 系に減衰がある場合の誤り率の解析解を導出し, 他の状態を用いた量子イルミネーションとレーザーレーダによる誤り率との比較を行った. まず, 大崎らの示した 3 元コヒーレント状態信号の 3 次元ベクトル表現 [61] に基づき, 減衰を受けた擬似ベル状態の密度作用素を行列表現することで, 誤り率の解析解を導出した. この解析解を用い, 無減衰の場合, 擬似ベル

状態を用いた量子イルミネーションが、シグナルのエネルギーを同一とした場合、レーザーレーダよりも常に誤り率が低くなることを解析的に示した。次に、減衰がある場合について、2モードのガウス状態、最大擬似ベル状態、非最大擬似ベル状態を用いた量子イルミネーションとレーザーレーダによる誤り率の優位性比較を行った。その結果、擬似ベル状態を用いた量子イルミネーションは、減衰があった場合も、レーザーレーダよりも常に誤り率が低くなること、2モードのガウス状態を用いた量子イルミネーションの誤り率とは、同程度か低い誤り率となることを明らかにした。

本研究では、これまでのTanらのChernoff限界を用いるアプローチではなく、誤り率そのものを評価している。したがって、平均光子数が非常に小さいときにのみ成り立つ近似も使っていない。誤り率を計算することで、いまままで広く議論されてきた、2モードのガウス状態を用いた量子イルミネーションは、レーザーレーダに比べて、平均光子数が小さい限られた条件でしか優位とならないこともわかった。これに対し、擬似ベル状態は常にレーザーレーダに対して優位性を保つため、量子イルミネーションが限られた場面でのみ用いられるのではなく、適切に状態を選ぶことで、利用範囲が大幅に拡充されることが期待される。また、エンタングルメントの応用である量子イルミネーションを行う際、エンタングルメントが大きければ良いというわけでは無いことが明確に示されたことも興味深い。したがって、量子イルミネーションの性能を決めるのは、単純にエンタングルメントの大きさであるのではなく、量子イルミネーションに適した種類のエンタングルメント状態を選ぶべきであるということを示しているといえる。

さて、本研究では、2.3.5項のとおり擬似ベル状態として $\alpha = \beta$ の場合を考察してきた。しかしながら、本研究の設定では通信路の減衰の影響を受けるのはS系のみであるため、 α を β よりも大きく設定し、減衰後のS系がA系における振幅と同レベルになるように調整することで性能が向上するのではないかという疑問が生ずるかもしれない。この点に関しては、擬似ベル状態として送信側でエンタングルメントが最大となるものと受信側で最大となるものについて量子イルミネーションの特性比較をした論文[69]にお

いて、 $\alpha = \beta$ の場合が優れているという結果が示されている。その結果は、エンタングルメントの大きさが受信側で大きければ量子イルミネーションの性能が良いわけではないことを表し、本研究の結果と合わせ、エンタングルメントの大きさと応用プロトコルの性能の関係が単純ではないことを注意すべきであることを示しているといえる。

今後の課題として、今回数値的に示した最大と非最大擬似ベル状態の優位性比較、擬似ベル状態と2モードのガウス状態の優位性比較などを解析的に示すことが挙げられる。また、減衰に加え熱雑音などがある場合について、擬似ベル状態による量子イルミネーションの誤り率を考察することが挙げられる。熱雑音を考慮する場合は、本質的に無限次元空間を考える必要があるため、本研究における 6×6 行列を用いるアプローチとは異なる手法を開発する必要があると考えられる。最後に、受信量子状態の測定をいかに物理的に実装するかを考えることも重要な課題である。擬似ベル状態を量子イルミネーションに利用した場合の測定の物理的実装方法は考察されておらず、今後の課題といえるが、量子リーディングについては、理想的な場合と減衰がある場合について、ビームスプリッターと光子計数器という簡単な構成で擬似ベル状態に対する測定が可能であることが示されている [70, 71]。今後、量子イルミネーションにおける測定の物理的実装方法を考察するにあたり、文献 [70, 71] のアイデアが参考になるものと思われる。

第7章 結論

本論文は、量子通信及び量子計測システムの実用化・民生用化という現代社会のニーズに応え、量子受信機の視点から出発し、相手からの信号を受信する方式に対応する量子通信システムと、自分が送信した信号を自分で受信する方式に対応する量子計測システムの基本形である量子レーダシステムを扱った。第1章で述べた二つの目標に着目し、本論文では具体的に以下の二つの研究に取り組んだ。

研究1：本研究では、PSK変調を用いた量子通信システムについて、まず、位相雑音量 σ^2 が正確に見積もれる場合から出発した。具体的には、MPSKコヒーレント状態信号が送信され、正規分布 $N(0, \sigma^2)$ に従う位相雑音を受けた受信混合状態信号に対する量子最適測定¹の導出を行い、量子最適受信機による誤り率特性を明らかにした。その結果、量子最適受信機は常に古典最適受信機より優位であるが、位相雑音自体が大きい場合には信号エネルギーを増やしても誤りを軽減することが困難であることがわかった。次に、量子受信機が σ^2 の変化に追従できない場合を考えた。具体的には、量子受信機として実際と異なる σ^2 に対する量子最適受信機を考え、その誤り率特性を明らかにした。この量子受信機は量子最適受信機よりも性能が悪いが、更に古典最適受信機よりも性能が低下する可能性があることを示した。最後に、 σ^2 の見積もりが正確にはできないものであるという事実を認めた上で、どこまでの最適化が可能なのかを考察した。具体的には、 σ^2 の見積もりがピンポイントではできないもののある範囲 R の中に入っているという想定の下、ミニマックス規準に基づき R に対して最適化を行った。そこで、利用可能な量子受信機のクラスによって分けら

れたA, B, Cの三ケースのロバスト性を評価したが, 結果的に, 状況に応じてケースCに基づいた設計を行えばよいといえる. このミニマックス規準に基づく設計は, 位相雑音量の変化に対しロバストな量子受信機の設計規準であるとみなすことができる.

研究2: 本研究では, 量子最適受信機を用いた量子レーダシステム, すなわち量子イルミネーションを考え, ベル状態, 2モードのガウス状態, 擬似ベル状態の時間空間発展を記述するSchrödinger表示を利用し, それらを用いた量子イルミネーションについて誤り率規準に基づき性能の評価・比較を行い, 誤り率特性を考察した. また, エンタングルド状態ではなく, コヒーレント状態を用いた従来のレーザーレーダとの比較も行った. 本研究では特に, 減衰を受けた擬似ベル状態を用いた量子イルミネーションの解析のために, 3元コヒーレント状態信号の3次元ベクトル表現を利用し, まず, 新たな解析的アプローチで誤り率の解析解を導出した. その結果を用い, 無減衰の場合に関してはレーザーレーダに対して明確な優位性を持つことを解析的に示した. 減衰ありの場合には, 解析解を用いた数値特性を様々な減衰率や平均光子数について調べることにより, 擬似ベル状態を用いた量子イルミネーションがレーザーレーダだけでなく, 2モードのガウス状態を用いた量子イルミネーションよりも優位であることを示した. この結果は量子イルミネーションの適用範囲を大幅に拡張できることを示しており, 実用化にむけて有用性が高いといえる.

さて, 第1章や5.1節でも述べたとおり, 量子通信は1960年代が萌芽期といえ, その後1970年代に物理的実装に関する議論が始まって以降, 数多くの先人の知恵が蓄積されてきた. それに対して量子計測は, 本論文で扱ったエンタングルメントを用いるクラスについて, 基本プロトコルの提案が2010年頃までにかけて行われたため, 量子通信に比べある意味で若い分野とあってよい. さらに, 極限性能を示す量子Chernoff限界などを用いた解析研究が数多くなされてきたが, 量子通信と独立に発展しているということ

ができる。このことは、従来の無線通信とレーダが独立的に発展してきたことと類似した流れになっている。しかし、近年、周波数逼迫問題の解決にあたって、無線通信とレーダに関して共通する理論や処理方式が多いことに着目し、通信信号とレーダ信号を共用化する研究が進められている [72]。同じように、本論文では量子計測の民生利用にあたって、量子通信と量子レーダに関して共通する理論に着目し、量子通信で蓄積されてきた知恵を量子レーダの研究に持ち込んだといえる。このように、量子通信と量子計測という異分野の融合研究は、両分野の課題の解決や新たな可能性の開拓につながると考えられる。

謝辞

本論文を結ぶにあたり、終始適切なお助言を賜り、また懇切にご指導下さった臼田毅教授に感謝致します。熱心なお議論と有益なお助言を頂いた玉川大学量子情報科学研究所の中平健治教授に感謝致します。また、本研究の遂行にあたって玉川大学量子情報科学研究所、香川高等専門学校一般教育科、名古屋大学工学研究科、名城大学理工学研究科、愛知県立大学情報科学研究科の先生方に、数々のお議論、ご助力を賜りました。玉川大学量子情報科学研究所の広田修教授、相馬正宜教授、加藤研太郎教授、二見史生教授、濱田充教授、政田元太教授、谷澤健准教授、香川高等専門学校一般教育科の大橋あすか助教、名古屋大学工学研究科の曾我部知広准教授、名城大学理工学研究科の宇佐見庄五准教授、愛知県立大学情報科学研究科の代田健二教授、神谷幸宏准教授、平尾将剛准教授、田坂浩二准教授に感謝致します。とりわけ快く副査を許諾して頂いた愛知県立大学の代田健二教授、神谷幸宏准教授、玉川大学の加藤研太郎教授に改めて感謝致します。折りにふれ有益なお議論、ご助言を頂いた、大阪大学の高比良宗一特任研究員に感謝致します。また、多くのお助言、ご意見を頂いた愛知県立大学臼田研と名城大学宇佐見研の皆さんに感謝致します。

本研究の一部は、JSPS 科研費 (JP16H04367, JP20H00581, JP21K04064), (一財) 丸文財団の交流研究助成事業, (公財) NEC C&C 財団の外国人研究員助成事業の助成を受けた。国際会議 2018 International Symposium on Information Theory and Its Applications (ISITA2018) と 19th Asian Quantum Information Science Conference (AQIS2019) の参加にあたって旅費の支援をして頂いた (一財) 丸文財団 (第 22 回国際交流助成事業) と (公財) 原総合知的通信システム基金

(第56回国際会議論文発表者助成事業)に感謝致します。とりわけ(独)日本学生支援機構(文部科学省外国人留学生学習奨励費),(公財)ロータリー米山記念奨学会(修士課程ロータリー米山記念奨学金,クラブ支援ロータリー米山記念奨学金),公益信託日本特殊陶業海外留学生奨学基金(奨学助成金),愛知県立大学からの経済的支援に感謝致します。

最後になりますが,筆者の生活や精神面を支えてくれた両親,祖父母に感謝の意を表します。

参考文献

- [1] 佐々木雅英, 松岡正浩, 「量子情報通信」, オプトロニクス社, (2006).
- [2] M. Sasaki, K. Kato, M. Izutsu, and O. Hirota, *A demonstration of superadditivity in the classical capacity of a quantum channel*, Physics Letters A, **236**, pp.1-4, (1997).
- [3] M. Sasaki, K. Kato, M. Izutsu, and O. Hirota, *Physical aspect of the improvement of quantum-noise characteristics caused by unitary transformation with a nonlinear optical medium*, Physical Review A, **58**, pp.146-158, (1998).
- [4] D. Gabor, *CIII. Communication theory and physics*, The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, Series 7, **41**, pp.1161-1187, (1950).
- [5] C.W. Helstrom, *Detection theory and quantum mechanics*, Information and Control, **10**, pp.254-291, (1967).
- [6] A.S. Holevo, *Statistical decision theory for quantum systems*, Journal of Multivariate Analysis, **3**, pp.337-394, (1973).
- [7] H.P. Yuen, R.S. Kennedy, and M. Lax, *Optimum testing of multiple hypotheses in quantum detection theory*, IEEE Transactions on Information Theory, **21**, pp.125-134, (1975).
- [8] C.W. Helstrom, *Quantum Detection and Estimation Theory*, Academic Press, (1976).

- [9] P. Hausladen, R. Jozsa, B. Schumacher, M. Westmoreland, and W.K. Wootters, *Classical information capacity of a quantum channel*, Physical Review A, **54**, pp.1869-1876, (1996).
- [10] A.S. Holevo, *The capacity of quantum channel with general signal states*, IEEE Transactions on Information Theory, **44**, pp.269-273, (1998).
- [11] B. Schumacher and M.D. Westmoreland, *Sending classical information via noisy quantum channels*, Physical Review A, **56**, pp.131-138, (1997).
- [12] C.H. Bennett and G. Brassard, *Quantum cryptography: Public key distribution and coin tossing*, Proc. of IEEE International Conference on Computers Systems and Signal Processing, Bangalore, India, pp.175-179, (1984).
- [13] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, *Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?*, Physical Review, **47**, pp.777-780, (1935).
- [14] C.M. Caves, *Quantum-mechanical noise in an interferometer*, Physical Review D, **23**, pp.1693–1708, (1981).
- [15] H. Grote, K. Danzmann, K.L. Dooley, R. Schnabel, J. Slutsky, and H. Vahlbruch, *First long-term application of squeezed states of light in a gravitational-wave observatory*, Physical Review Letters, **110**, 181101, (2013).
- [16] A. Aspect, P. Grangier, and G. Roger, *Experimental realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment: A new violation of Bell's inequalities*, Physical Review Letters, **49**, pp.91-94, (1982).
- [17] A.K. Ekert, *Quantum cryptography based on Bell's theorem*, Physical Review Letters, **67**, pp.661-663, (1991).
- [18] C.H. Bennett and S.J. Wiesner, *Communication via one- and two-particle operators on Einstein-Podolsky-Rosen states*, Physical Review Letters, **69**, pp.2881-2884, (1992).

- [19] C.H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres, and W.K. Wootters, *Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels*, Physical Review Letters, **70**, pp.1895-1899, (1993).
- [20] T.B. Pittman, Y.H. Shih, D.V. Strekalov, and A.V. Sergienko, *Optical imaging by means of two-photon quantum entanglement*, Physical Review A, **52**, pp.R3429-R3432, (1995).
- [21] S. Lloyd, *Enhanced sensitivity of photodetection via quantum illumination*, Science, **321**, pp.1463-1465, (2008).
- [22] S. Pirandola, *Quantum reading of a classical digital memory*, Physical Review Letters, **106**, 090504, (2011).
- [23] A.S. Holevo, M. Sasaki, and O. Hirota, *Capacity of quantum Gaussian channels*, Physical Review A, **59**, pp.1820-1828, (1999).
- [24] V. Giovannetti, S. Guha, S. Lloyd, L. Maccone, J.H. Shapiro, and H.P. Yuen, *Classical capacity of the lossy bosonic channel: The exact solution*, Physical Review Letters, **92**, 027902, (2004).
- [25] S.-K. Liao, W.-Q. Cai, *et al.*, *Satellite-to-ground quantum key distribution*, Nature, **549**, pp.43-47, (2017).
- [26] H. Takenaka, A. Carrasco-Casado, M. Fujiwara, M. Kitamura, M. Sasaki, and M. Toyoshima, *Satellite-to-ground quantum-limited communication using a 50-kg-class microsatellite*, Nature Photonics, **11**, pp.502-508, (2017).
- [27] D.Yu. Vasylyev, A.A. Semenov, and W. Vogel, *Toward global quantum communication: beam wandering preserves nonclassicality*, Physical Review Letters, **108**, 220501, (2012).
- [28] S. Olivares, S. Cialdi, F. Castelli, and M.G.A. Paris, *Homodyne detection as a near-optimum receiver for phase-shift-keyed binary communication in the presence of phase diffusion*, Physical Review A, **87**, 050303(R), (2013).

- [29] Z. Zhang, S. Mouradian, F.N.C. Wong, and J.H. Shapiro, *Entanglement-enhanced sensing in a lossy and noisy environment*, Physical Review Letters, **114**, 110506, (2015).
- [30] O. Hirota, *Importance and applications of infinite dimensional non-orthogonal quantum state*, Journal of Lasers, Optics & Photonics, **3**, 1000129, (2016).
- [31] K.M.R. Audenaert, J. Calsamiglia, R. Muñoz-Tapia, E. Bagan, Ll. Masanes, A. Acin, and F. Verstraete, *Discriminating states: The quantum Chernoff bound*, Physical Review Letters, **98**, 160501, (2007).
- [32] G. Cariolaro, *Quantum Communications*, Springer International Publishing, (2015).
- [33] S.H. Tan, B.I. Erkmen, V. Giovannetti, S. Guha, S. Lloyd, L. Maccone, S. Pirandola, and J.H. Shapiro, *Quantum illumination with Gaussian states*, Physical Review Letters, **101**, 253601, (2008).
- [34] B.L. Schumaker and C.M. Caves, *New formalism for two-photon quantum optics. II. Mathematical foundation and compact notation*, Physical Review A, **31**, pp.3093–3111, (1985).
- [35] O. Hirota and M. Sasaki, *Entangled state based on nonorthogonal state*, Proc. of Quantum Communication, Computing, and Measurement 3, pp.359-366, (2001).
- [36] A.S. Holevo, *Coding theorems for quantum channels*, Tamagawa University Research Review, no.4, (1998).
- [37] M.G. Genoni, S. Olivares, and M.G.A. Paris, *Optical phase estimation in the presence of phase diffusion*, Physical Review Letters, **106**, 153603, (2011).
- [38] M. Bina, A. Allevi, M. Bondani, and S. Olivares, *Homodyne-like detection for coherent state-discrimination in the presence of phase noise*, Optics Express, **25**, pp.10685-10692, (2017).
- [39] C.W. Helstrom, *Bayes-cost reduction algorithm in quantum hypothesis testing*, IEEE Transactions on Information Theory, **28**, pp.359-366, (1982).

- [40] 広田修, 「光通信理論」, 森北出版, (1985).
- [41] P. Hausladen, R. Jozsa, B. Schumacher, M. Westmoreland, and W.K. Wootters, *Classical information capacity of a quantum channel*, Physical Review A, **54**, pp.1869-1876, (1996).
- [42] 滑川敏彦, 森永規彦, 「光通信技術」, テレビジョン学会誌, **38**, pp.425-433, (1984).
- [43] 前田幹夫, 生岩量久, 鳥羽良和, 「光・無線伝送技術の基礎と応用」, コロナ社, (2013).
- [44] M. Sasaki, T.S. Usuda, and O. Hirota, *Physical aspect of the improvement of quantum-noise characteristics caused by unitary transformation with a nonlinear optical medium*, Physical Review A, **51**, pp.1702-1705, (1995).
- [45] M.A. Nielsen and I.L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press, (2000).
- [46] J.H. Shapiro, *The quantum illumination story*, IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine, **35**, pp.8-20, (2020).
- [47] O. Hirota and S. Ikehara, *Minimax strategy in the quantum detection theory and its application to optical communication*, The Transactions of the IECE of Japan, **E65**, pp.627-633, (1982).
- [48] J.H. Shapiro, S. Guha, and B.I. Erkmen, *Ultimate channel capacity of free-space optical communications*, Journal of Optical Networking, **4**, pp.501-516, (2005).
- [49] G. Cariolaro and G. Pierobon, *Performance of quantum data transmission systems in the presence of thermal noise*, IEEE Transactions on Communications, **58**, pp.623-630, (2010).
- [50] K. Kato, *Quantum detection of quaternary amplitude-shift keying coherent state signal*, Tamagawa University Quantum ICT Research Institute Bulletin, **6**, pp.9-24, (2016).

- [51] S.J. Dolinar, *An optimum receiver for the binary coherent state quantum channel*, Research Laboratory of Electronics, MIT, Quarterly Progress Report, **111**, pp.115-120, (1973).
- [52] R.S. Kennedy, *A near-optimum receiver for the binary coherent state quantum channel*, Research Laboratory of Electronics, MIT, Quarterly Progress Report, **108**, pp.219-225, (1973).
- [53] G. Xie, F. Wang, A. Dong, and H. Guo, *A novel polarization-multiplexing system for free-space optical links*, IEEE Photonics Technology Letters, **23**, pp.1484-1486, (2011).
- [54] Y. Wang, D. Wang, and J. Ma, *On the performance of coherent OFDM systems in free-space optical communications*, IEEE Photonics Journal, **7**, 7902410, (2015).
- [55] A.S. Holevo, *Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory*, North-Holland, (1982).
- [56] M.T. DiMario, L. Kunz, K. Banaszek, and F.E. Becerra, *Optimized communication strategies with binary coherent states over phase noise channels*, npj Quantum Information, **5**, 65, (2019).
- [57] S.J. van Enk and O. Hirota, *Entangled coherent states: Teleportation and decoherence*, Physical Review A, **64**, 022313, (2001).
- [58] H. Prakash and M.K. Mishra, *Teleportation of superposed coherent states using nonmaximally entangled resources*, Journal of the Optical Society of America B, **29**, pp.2915-2923, (2012).
- [59] O. Hirota, *Error free quantum reading by quasi Bell state of entangled coherent states*, Quantum Measurements and Quantum Metrology, **4**, pp.70-73, (2017).
- [60] 山内淳, 石川恵大, 高橋祐斗, 王天澄, 臼田毅, 「減衰環境における量子イルミネーションの利用エンタングルド状態依存性」, 令和元年度電気・電子・情報関係学会東海支部連合大会講演論文集, F5-5, (2019).

- [61] M. Osaki, M. Ban, and O. Hirota, *Derivation and physical interpretation of the optimum detection operators for coherent-state signals*, Physical Review A, **54**, pp.1691-1701, (1996).
- [62] M. Sasaki and O. Hirota, *Two examples of measurement processes illustrating Helstrom's optimum decision bound*, Physics Letters A, **210**, pp.21-25, (1996).
- [63] 山口悟, 白田毅, 内匠逸, 「非対称エネルギー減衰した擬似ベル状態による確率的量子テレポーテーション」, 電気学会論文誌 C, **129**, pp.2161-2162, (2009).
- [64] 竹内博貴, 山口翔太, 白田毅, 「擬似ベル状態援助による古典情報伝送におけるエンコード最適化と通信路容量の特性」, 電気学会論文誌 C, **133**, pp.2176-2177, (2013).
- [65] G. Bercu, *New refinements for the error function with applications in diffusion theory*, Symmetry, **12**, 2017, (2020).
- [66] 石川恵大, 王天澄, 白田毅, 「最大と非最大擬似ベル状態を用いた片側減衰がある量子リーディングの性能比較」, 電気学会論文誌 C, **140**, pp.1328-1335, (2020).
- [67] F. Goodwin and T. Nussmeiera, *Optical heterodyne communications experiments at 10.6 μ* , IEEE Journal of Quantum Electronics, **4**, pp.612-617, (1968).
- [68] 三浦秀一, 古浜洋治, 福島圓, 「CO₂ レーザ波の大気中伝送の諸問題」, 電波研究所季報, **16**, pp.577-584, (1970).
- [69] J. Yamauchi, Y. Takahashi, T. Wang, and T.S. Usuda, *Quantum illumination using quasi-Bell states*, Proc. of 2020 International Symposium on Information Theory and Its Applications (ISITA2020), pp.106-110, Hawaii, USA, (2020).
- [70] K. Kato and O. Hirota, *Effect of decoherence in quantum reading with phase shift keying signal of entangled coherent states*, Proc. of SPIE 8875, 88750P, San Diego, USA, (2013).

- [71] K. Kato, *Detection of the binary phase-encoded quasi-Bell state signal in a lossy environment by a half beam splitter and photon counters*, Tamagawa University Quantum ICT Research Institute Bulletin, **10**, pp.17-21, (2020).
- [72] 高橋徹, 「通信技術者のためのレーダの基礎」, コロナ社, (2019).

公表論文

学術雑誌論文（査読あり）

- [1] 王天澄, 小山真司, 中平健治, 白田毅, “位相雑音環境下における量子受信機の誤り率特性とそのロバスト設計の規準”, 電子情報通信学会論文誌 B, Vol.J105-B, No.03, pp.39-51, (2022).
DOI: 10.14923/transcomj.2021GWP0028
- [2] 王天澄, 高比良宗一, 白田毅, “最大と非最大擬似ベル状態を用いた減衰環境における量子イルミネーションの誤り率”, 電気学会論文誌 C, Vol.142, No.2, pp.151-161, (2022).
DOI: 10.1541/ieejeiss.142.151
- [3] 宮崎龍輔, 吉田真菜, 王天澄, 高比良宗一, 白田毅, “非対称量子信号に対する通信路行列計算の簡単化”, 電子情報通信学会論文誌 B, Vol.J105-B, No.03, pp.74-87, (2022).
DOI: 10.14923/transcomj.2021GWP0032
- [4] 五十川翔梧, 中川綾太, 王天澄, 高比良宗一, 白田毅, “純粋状態信号に対する Belavkin Weighted Square-root Measurement の幾何学的表現”, 電子情報通信学会論文誌 B, Vol.J105-B, No.03, pp.62-73, (2022).
DOI: 10.14923/transcomj.2021GWP0030
- [5] 石川恵大, 王天澄, 白田毅, “最大と非最大擬似ベル状態を用いた片側減衰がある量子リーディングの性能比較”, 電気学会論文誌 C, Vol.140, No.12, pp.1328-1335, (2020).

国際会議発表論文（査読あり）

- [1] **T. Wang**, S. Takahira and T.S. Usuda, “Error performance of ASK-type asymmetric quantum communication”, 21th Asian Quantum Information Science Conference (AQIS2021), Tokyo, Japan, Abstracts of AQIS2021 (poster sessions), pp.200-203, (2021.9).
- [2] **T. Wang** and T.S. Usuda, “Exact solution of error probability for quantum illumination with attenuation using quasi-Bell state”, 20th Asian Quantum Information Science Conference (AQIS2020), Sydney, Australia, Proceedings of AQIS2020, pp.135-136, (2020.12).
- [3] **T. Wang** and T.S. Usuda, “Effect of non-Gaussian noise due to beam wandering on error performance of quantum measurement”, 2020 International Symposium on Information Theory and Its Applications (ISITA2020), Hawaii, United States of America, Proceedings of ISITA2020, pp.106-110, (2020.10).
DOI:10.34385/proc.65.A06-1
- [4] **T. Wang**, K. Nakahira, and T.S. Usuda, “Design criteria for a robust quantum receiver in the presence of phase noise”, 19th Asian Quantum Information Science Conference (AQIS2019), Seoul, Korea, Proceedings of AQIS2019 (poster day 1), pp.142-145, (2019.8).
- [5] **T. Wang**, K. Nakahira, and T.S. Usuda, “Error performance and robustness of optimum quantum detection for *M*PSK signals in the presence of phase noise”, 2018 International Symposium on Information Theory and Its Applications (ISITA2018), Singapore, Proceedings of ISITA2018, pp.344-348, (2018.10).
DOI:10.23919/ISITA.2018.8664303

- [6] **T. Wang**, K. Nakahira, and T.S. Usuda, “Error performance of optimum quantum measurement in the presence of non-Gaussian noise and Gaussian noise”, 18th Asian Quantum Information Science Conference (AQIS2018), Nagoya, Japan, Extended Abstracts of AQIS2018, No.108, (2018.9).
- [7] **T. Wang**, K. Kita, and T.S. Usuda, “Channel capacity of quantum channel with beam wandering”, 17th Asian Quantum Information Science Conference (AQIS2017), Singapore, Proceedings of AQIS2017, pp.215-217, (2017.9).

学会・研究会発表論文

- [1] **王天澄**, 喜多健志朗, 白田毅, “ビームワンダリングが発生した場合の非対称信号を用いた量子通信路容量”, 第15回情報学ワークショップ (WiNF2017) 論文集, 中部大学, B-3, (2017.11).
- [2] **王天澄**, 喜多健志朗, 白田毅, “ビームワンダリングがある場合の古典及び量子最適受信機の誤り率の比較”, 平成28年度電気・電子・情報関係学会東海支部連合大会講演集, 豊田工業高等専門学校, B3-3, (2016.9).

受賞

[1] 2022年度学生・若手論文特集号優秀論文賞, (2022)

受賞者：宮崎龍輔, 吉田真菜, **王天澄**, 高比良宗一, 白田毅

受賞論文：“非対称量子信号に対する通信路行列計算の簡単化”, 電子情報通信学会論文誌B, Vol.J105-B, No.03, pp.74-87, (2022).

授賞団体：電子情報通信学会

[2] 令和2年度植之原留学生奨励賞, (2020)

受賞者：**王天澄**

受賞研究テーマ：“量子フェージング通信路特性の解明に関する研究”

授賞団体：電気電子情報学術振興財団

[3] 平成30年度学生研究奨励賞, (2019)

受賞者：**王天澄**

受賞研究テーマ：“無線量子通信路の諸特性の解明とロバストな量子受信機的设计法に関する研究”

授賞団体：電子情報通信学会東海支部