無線量子通信路の数学表現に関する研究

中川 綾太　　　指導教員：臼田 毅

1　はじめに

これまでの量子通信路に関する研究では，光ファイバ環境を想定した熱雑音通信路モデルや減衰通信路モデルなどが示され，通信路容量をはじめとする様々な成果が得られている．量子通信の発展に向けて，光ファイバ環境ではなく無線環境を想定する際には，通信路の時間的・空間的変動を記述する量子フェージング通信路モデルが必要となる．そこでまず，Personick によって基本的なフェージング通信路モデル [1] が示されたのち，位相変動通信路 [2] などの具体的な通信路を想定したモデルが提案されてきた．その中で，我々のグループは減衰通信路におけるエネルギー透過率を確率的とする確率的減衰通信路モデルの提案を行い，ディジタル変調時の誤り率特性や通信路容量を明らかにしてきた [3]．本モデルは適切な確率分布を設定することで地上–衛星通信において重要となるビームワンダリング現象 [4] を記述することができ，無線量子通信の基本的なモデルとして考えられる．しかしながら，これまでの研究では量子通信路の性能解析にのみ着目し，通信路の数学表現には着目されてこなかった．

本研究は一般的な無線量子通信路の数学表現の検討を目的とし，確率的減衰通信路に対して量子通信路の数学表現として有用なクラウス表現の導出を試みる．これまでに qubit 系や qutrit 系に対して，量子状態や通信路のストークス表現，Choi 行列を用いてクラウス表現を導出した．しかしながら，これらのアプローチでは次元ごとに数値計算や非線形連立方程式を解く必要があり，本来導出したい対象である光系（無限次元系）への拡大は困難となる．そこで，量子状態のストークス表現のアプローチで導出されるクラウス作用素の条件式に着目し，多次元系における条件式を直接的に求めることを試みる．本稿では，多次元系の確率的減衰通信路に対してクラウス作用素を定める条件式を示す．

2　量子通信路とクラウス表現

量子通信路は，数学的には量子状態を別の量子状態に変換する写像である．一般的に，量子通信路は量子系 $\mathcal{H}_A$ の量子状態を別の量子系 $\mathcal{H}_B$ の量子状態に変換するものである．ただし，$\mathcal{H}$ は量子系を表すヒルベルト空間である．すなわち，$\mathcal{E}$ を量子通信路とすると，

$$\mathcal{E} : S(\mathcal{H}_A) \to S(\mathcal{H}_B) \quad \text{or} \quad \hat{\rho}^{(\mathrm{in})} \xrightarrow{\mathcal{E}} \hat{\rho}^{(\mathrm{out})} \tag{1}$$

である．ただし，$\hat{\rho}^{(\mathrm{in})} \in S(\mathcal{H}_A)$, $\hat{\rho}^{(\mathrm{out})} \in S(\mathcal{H}_B)$ は量子通信路 $\mathcal{E}$ の入出力量子状態（$S(\mathcal{H})$ は $\mathcal{H}$ 上の密度作用素全体の集合）であり，$\mathcal{E}$ はトレース保存完全正写像という条件を満たす．

量子通信路はクラウス表現によって簡潔な形で表現することができる．

$$\hat{\rho}^{(\mathrm{out})} = \mathcal{E}(\hat{\rho}^{(\mathrm{in})}) = \sum_k \hat{E}_k \hat{\rho}^{(\mathrm{in})} \hat{E}_k^\dagger \tag{2}$$

ここで，$\hat{E}_k$ はクラウス作用素と呼ばれる $\mathcal{H}$ 上の線形作用素であり，完全性関係を満たす．

$$\sum_k \hat{E}_k^\dagger \hat{E}_k = I \tag{3}$$

ただし，I は $\mathcal{H}$ 上の恒等作用素である．

3　確率的減衰通信路

本節では，先行研究で提案された確率的減衰通信路モデル [3] について説明する．ただし，扱う量子系は光系であり，光子数 n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ の光子数状態を $|n\rangle$ とすると，この量子系に対応するヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ は，$\left\{ |n\rangle \;\middle|\; n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \right\}$ を正規直交基底とする可算無限次元である．ここで，$\mathbb{Z}_{\geq 0}$ は非負整数全体からなる集合である．

3.1　減衰通信路

減衰通信路では，出力量子状態がエネルギー透過率 $\eta \in [0, 1]$ による減衰を受ける環境が想定される．通信路への入出力量子状態（密度作用素）を $\hat{\rho}^{(\mathrm{in})}, \hat{\rho}^{(\eta)}$ とすると，減衰通信路は次式で表される．

$$\hat{\rho}^{(\eta)} = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{E}_k(\eta) \hat{\rho}^{(\mathrm{in})} \hat{E}_k^\dagger(\eta) \tag{4}$$

ただし，$\hat{E}_k(\eta)$ $(k \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ は減衰通信路のクラウス作用素である [5]．

$$\hat{E}_k(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\binom{n}{k}} \sqrt{\eta^{n-k}(1-\eta)^k} |n-k\rangle\langle n| \tag{5}$$

さて，通信路への入力が光子数 0 から $d-1$ の光子数状態 $|0\rangle, \cdots |d-1\rangle$，およびその重ね合わせに限られる場合を考える．減衰通信路においては，光子数は変わらないか減るかのみであるため，通信路の入出力に対応するヒルベルト空間としては，次式のような部分空間を考えれば十分である．

$$\mathcal{H}_d = \left\{ n_0|0\rangle + \cdots + n_{d-1}|d-1\rangle \;\middle|\; n_0, \cdots, n_{d-1} \in \mathbb{C} \right\} \subset \mathcal{H}$$

すなわち，このような限定の下，量子系は多次元系として扱うことができ，式 (5) は次式のように書き直すことができる．

$$\hat{E}_k(\eta) = \sum_{n=0}^{d-1} \sqrt{\binom{n}{k}} \sqrt{\eta^{n-k}(1-\eta)^k} |n-k\rangle\langle n| \quad (0 \leq k \leq d-1) \tag{6}$$

$$\hat{E}_k(\eta) = 0 \quad (k \geq d) \tag{7}$$

3.2　確率的減衰通信路

確率的減衰通信路では受信パワーレベルが時間変動する非選択性フェージング環境が想定され，透過率 η を確率的としたモデルが提案された．通信路への入出力量子状態を $\hat{\rho}^{(\mathrm{in})}, \hat{\rho}^{(P)}$ とすると，確率的減衰通信路は次式で表される．

$$\hat{\rho}^{(P)} = \int_0^1 P(\eta) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \hat{E}_k(\eta) \hat{\rho}^{(\mathrm{in})} \hat{E}_k^\dagger(\eta) \right) d\eta \tag{8}$$

ただし，$P(\eta)$ は通信路により定まるエネルギー透過率の確率分布である．式 (8) は $P(\eta)$ を適切に設定することによって，レイリーフェージングやビームワンダリングなどの出力量子状態を表すことができる．

さて，式 (8) は減衰通信路のクラウス表現を用いて出力量子状態を表したものであるが，確率的減衰通信路のクラウス表現そ

のものを表しているわけでは無いことを注意しておく．本研究で得たいものは，次式で表されるような $P(\eta)$ に対する確率的減衰通信路のクラウス作用素 $\hat{F}_l(P)$ である．

$$\hat{\rho}^{(P)} = \sum_{l=0}^{\infty} \hat{F}_l(P)\hat{\rho}^{(\mathrm{in})}\hat{F}_l^{\dagger}(P) \tag{9}$$

4 確率的減衰通信路のクラウス表現

本節では多次元系における確率的減衰通信路のクラウス作用素の条件式を導出する．確率的減衰通信路のクラウス作用素の条件式を求めるにあたり，まず減衰通信路の場合を示す．

多次元系における減衰通信路のクラウス作用素の行列表現を考えると，式 (6), (7) の定義から行列成分は光子数状態を用いた $|n-k\rangle\langle n|$ で表され，上三角行列となる．確率的減衰通信路も式 (8) の定義から同様の性質を持ち，確率的減衰通信路のクラウス作用素の行列表現も上三角行列になる．そこで，行列成分を $a_l^{(i,j)}$ とするクラウス作用素 $\hat{F}_l(P)$ を考える．ここで，l の上限を $m-1$（m は必要となるクラウス作用素の個数）とおく．このとき，$a_l^{(i,j)}$ は減衰通信路の定義から実数であり，$i\ (=0,1,\cdots,d-1)$ は対角成分から i 要素右隣の成分，$j\ (=0,1,\cdots,d-1-i)$ は各 i に対する $(j+1)$ 行目の成分を表す．この場合，i は対象の光子数を減らす個数，j は変換先の光子数を表している．例えば，qubit 系であれば $\hat{F}_l^{(2)}(P)$，qutrit 系であれば $\hat{F}_l^{(3)}(P)$ のように表すことができる．

$$\hat{F}_l^{(2)}(P)=\begin{bmatrix} a_l^{(0,0)} & a_l^{(1,0)} \\ 0 & a_l^{(0,1)} \end{bmatrix},\ \hat{F}_l^{(3)}(P)=\begin{bmatrix} a_l^{(0,0)} & a_l^{(1,0)} & a_l^{(2,0)} \\ 0 & a_l^{(0,1)} & a_l^{(1,1)} \\ 0 & 0 & a_l^{(0,2)} \end{bmatrix} \tag{10}$$

このような条件の下であれば，$\boldsymbol{a}^{(i,j)}$ と $\hat{E}_k(\eta)$ に対して $i=k,\ j=n-k$ に対応するため，式 (6), (7) より減衰通信路におけるクラウス作用素の条件式は次式となる．

$$\boldsymbol{a}^{(i,j)}\cdot\boldsymbol{a}^{(i,j)} = \binom{i+j}{i}\eta^j(1-\eta)^i$$

$$\boldsymbol{a}^{(i,j)}\cdot\boldsymbol{a}^{(i,j')} = \sqrt{\binom{i+j}{i}\binom{i+j'}{i}} \times\sqrt{\eta^{(j+j')}}(1-\eta)^i \quad (j\neq j') \tag{11}$$

$$\boldsymbol{a}^{(i,j)}\cdot\boldsymbol{a}^{(i',j)} = 0 \quad (i\neq i') \tag{12}$$

ここで，$\boldsymbol{a}^{(i,j)}\in\mathbb{R}^m$ は m 次元実ベクトルである．

$$\boldsymbol{a}^{(i,j)} = \left[a_0^{(i,j)}, a_1^{(i,j)},\cdots,a_l^{(i,j)},\cdots,a_{m-1}^{(i,j)}\right]^{\mathrm{T}} \tag{13}$$

式 (8)∼(9) に示したように通信路の出力量子状態はクラウス作用素を用いて表すことができ，ここで求めているものはクラウス作用素の要素の内積を表す条件式である．このとき，確率的減衰通信路の条件式は出力量子状態の表現と同様に，減衰通信路の条件式に対して $P(\eta)$ の積分で表される．

$$\boldsymbol{a}^{(i,j)}\cdot\boldsymbol{a}^{(i,j)} = \binom{i+j}{i}\int_0^1 P(\eta)\eta^j(1-\eta)^i d\eta \tag{14}$$

$$\boldsymbol{a}^{(i,j)}\cdot\boldsymbol{a}^{(i,j')} = \sqrt{\binom{i+j}{i}\binom{i+j'}{i}} \times\int_0^1 P(\eta)\sqrt{\eta^{(j+j')}}(1-\eta)^i d\eta \quad (j\neq j') \tag{15}$$

$$\boldsymbol{a}^{(i,j)}\cdot\boldsymbol{a}^{(i',j)} = 0 \quad (i\neq i') \tag{16}$$

各要素を $\boldsymbol{a}^{(i,j)}$ とおいた作用素であれば完全性関係を満たすため，多次元系におけるクラウス作用素を考える場合は，式 (14)∼(16) を満たすような $\boldsymbol{a}_l^{(i,j)}$ を導出すればよい．

一例として，qubit 系における場合を示す．まず，qubit 系におけるクラウス作用素の条件式は次式となる．

$$\boldsymbol{a}^{(0,0)}\cdot\boldsymbol{a}^{(0,0)} = 1,\quad \boldsymbol{a}^{(1,0)}\cdot\boldsymbol{a}^{(1,0)} = 1-\alpha_2$$

$$\boldsymbol{a}^{(0,1)}\cdot\boldsymbol{a}^{(0,1)} = \alpha_2,\quad \boldsymbol{a}^{(0,0)}\cdot\boldsymbol{a}^{(0,1)} = \alpha_1 \tag{17}$$

ただし，$\alpha_i=\int_0^1 P(\eta)\eta^{\frac{i}{2}}d\eta$ である．次に，式 (17) の条件式から導出される $\boldsymbol{a}^{(i,j)}$ を次式に示す．

$$\boldsymbol{a}^{(0,0)} = [1,0,0]^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{a}^{(1,0)} = \left[0,0,\sqrt{1-\alpha_2}\right]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{a}^{(0,1)} = \left[\alpha_1,\sqrt{\alpha_2-\alpha_1^2},0\right]^{\mathrm{T}} \tag{18}$$

最後に，式 (18) の実ベクトルから要素を代入すると，次式に示すクラウス作用素 $\hat{F}_l^{(2)}(P)$ を導出することができる．

$$\hat{F}_0^{(2)}(P) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix},\quad \hat{F}_1^{(2)}(P) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\alpha_2-\alpha_1^2} \end{bmatrix}$$

$$\hat{F}_2^{(2)}(P) = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{1-\alpha_2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{19}$$

5 まとめ

本稿では，フェージングやビームワンダリングなどの無線量子通信を考えるうえで重要となる確率的減衰通信路について，多次元系のクラウス作用素の条件式を示した．本稿で導出した条件式を解くことによって多次元系のクラウス作用素を導出することができ，ストークス表現や Choi 行列を用いたアプローチよりも簡潔にクラウス作用素を示すことができる．

参考文献

[1] S.D. Personick, “Efficient analog communication over quantum channels,” Res. Lab. Electron., M. I. T., Cambridge, Tech. Rep. **477**, 1970.

[2] Stefano Olivares, Simone Cialdi, Fabrizio Castelli, and Matteo GA Paris, “Homodyne detection as a near-optimum receiver for phase-shift-keyed binary communication in the presence of phase diffusion,” Phys. Rev. A **87** (5), 050303, 2013.

[3] K. Kita, S. Koyama, and T.S. Usuda, “Attenuated quantum channel with probabilistic transmissivity,” Proceeding of AQIS2016, pp.171-173, 2016.

[4] D. Yu. Vasylyev, A. A. Semenov, and W. Vogel, “Toward global quantum communication: beam wandering preserves nonclassicality,” Phys. Rev. Lett. **108**, 220501, 2012.

[5] M.A. Nielsen and I.L. Chuang, “Quantum Computation and Quantum Information,” Cambridge University Press, 2000.

公表論文

1). **R. Nakagawa**, T. Wang, and T. S. Usuda, “Equations of conditions for kraus operators of probabilistic attenuated channel,” AQIS2021 Abstract Booklet Poster Sessions, pp.323–326, 2021.

2). **R. Nakagawa**, T. Wang, and T. S. Usuda, “Kraus representation of probabilistic attenuated channel,” AQIS2020 Proceedings, pp.91-92, 2020.

他 6 件 (筆頭著者)，8 件 (第二著者)