

## 非対称量子信号の通信路行列に関する研究

宮崎 龍輔

指導教員：白田 毅

## 1 はじめに

量子通信システムの信頼性あるいは安全性を評価する上で、最小誤り率などの量子信号検出限界 [1] を明らかにすることは非常に重要である。誤り率が通信路行列から簡単に計算することができるなど、量子信号検出限界を明らかにする際に、通信路行列は非常に有用な行列となっている。

量子通信においても、PSK (phase-shift keying) や ASK (amplitude-shift keying), QAM (quadrature amplitude modulation) などのデジタル通信でもよく知られている変調方式が利用される。これらの変調方式が使用されるとき、多くの場合、量子状態としてコヒーレント状態が用いられる。このため、信号を表す用語として、PSK, ASK, QAM にコヒーレント状態信号という言葉をつけた PSK コヒーレント状態信号 (単に PSK 信号と言うこともある) などが使われる。これらのうち、対称信号 (e.g. PSK コヒーレント状態信号など) については、量子信号検出限界を達成する量子最適受信機が、SRM (square-root measurement)[2] であることが知られている [3]。また、信号数が有限の数  $M$  である場合は、いかに  $M$  が大きくても、限界値そのものを計算するための公式も得られている。

これに対し、ASK, QAM などは非対称信号であるため、これらの知見を使うことができない。そのため、非対称信号に対しては数値計算により、SRM による誤り率などの計算が試みられているが、所要メモリによる制限のため、1000 を大きく超える信号数を扱うことは、困難となっている。

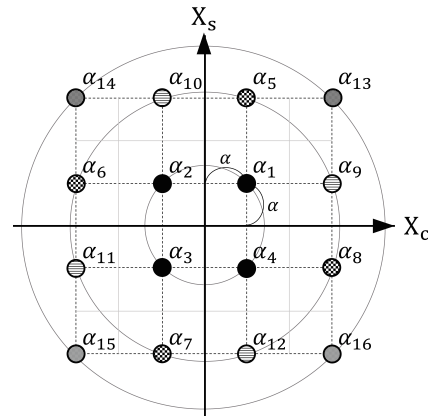
本研究は、非対称信号の通信路行列を計算することを目的としている。現在、成果として、ASK, AMPM (amplitude-modulated phase-modulated), QAM といった非対称信号に対して、その信号の部分的な対称性に注目することで、通信路行列の計算の規模を削減できることを明らかにした。本稿では、対称信号で得られた知見を用いることで、非対称信号である  $4m^2$  元 QAM コヒーレント状態信号の通信路行列の計算の規模が  $\frac{1}{4}$  の  $m^2$  に削減できることを示す。

## 2 グラム行列

$M$  元純粋状態信号系  $\{|\psi_i\rangle \in \mathcal{H} \mid i = 1, 2, \dots, M\}$  に対し、グラム行列  $\Gamma$  は以下のように定義される [1]。

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \langle \psi_1 | \psi_1 \rangle & \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle & \cdots & \langle \psi_1 | \psi_M \rangle \\ \langle \psi_2 | \psi_1 \rangle & \langle \psi_2 | \psi_2 \rangle & \cdots & \langle \psi_2 | \psi_M \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \psi_M | \psi_1 \rangle & \langle \psi_M | \psi_2 \rangle & \cdots & \langle \psi_M | \psi_M \rangle \end{bmatrix} \quad (1)$$

このように、グラム行列は、量子状態信号間の内積  $\langle \psi_i | \psi_j \rangle$  を  $(i, j)$  成分とする  $M$  次の正方行列である。その定義により、グラム行列はエルミート行列である。また、量子測定に SRM を用いた場合、グラム行列の平方根から通信路行列を求めることができる。一般に、行列の平方根は、その行列の固有値と固有ベクトルから計算できるので、グラム行列の固有値と固有ベクトルを求めることで通信路行列を計算することができる。そのため、グラム行列の固有値と固有ベクトルを求めることが重要である。

図1  $4m^2$  元 QAM コヒーレント状態信号 ( $m=2$ )3  $4m^2$  元 QAM コヒーレント状態信号とその固有値, 固有ベクトル

## 3.1 QAM コヒーレント状態信号とそのグラム行列

本稿で扱う  $4m^2$  元 QAM コヒーレント状態信号について説明する。本稿では、QAM 信号の中でも、図1のように、格子点上に  $4m^2(2m \times 2m)$  個の信号点をもつ信号を取り扱う。また、信号の順番が4つごとに区切った際に、それぞれが4相 PSK 信号になるよう番号を付けている点に注意する。この  $4m^2$  元 QAM コヒーレント状態信号のグラム行列は、以下のようになる。

$$\Gamma^{(4m^2)} = \begin{bmatrix} 1 & \langle \alpha_1 | \alpha_2 \rangle & \cdots & \langle \alpha_1 | \alpha_{4m^2} \rangle \\ \langle \alpha_2 | \alpha_1 \rangle & 1 & \cdots & \langle \alpha_2 | \alpha_{4m^2} \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \alpha_{4m^2} | \alpha_1 \rangle & \langle \alpha_{4m^2} | \alpha_2 \rangle & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

ただし、 $\Gamma$  の上付き添え字 ( $4m^2$ ) は行列サイズを表し、 $\Gamma^{(4m^2)}$  が  $4m^2$  次の正方行列であることを意味している。

## 3.2 グラム行列のブロック分割

本稿におけるメインのアイデアを述べる。図1の  $4m^2$  元 QAM コヒーレント状態信号をよく見ると、 $k = 1, 2, \dots, m^2$  として、

$$\mathcal{S}_k = \{|\alpha_{4k-3}\rangle, |\alpha_{4k-2}\rangle, |\alpha_{4k-1}\rangle, |\alpha_{4k}\rangle\} \quad (3)$$

という  $m^2$  個の4相 PSK 信号の集まりと見做すことができる。4相 PSK 信号は典型的な対称信号であるので、 $4m^2$  元 QAM 信号は4個ずつ区切った信号が対称であるという意味で部分的な対称性を持つと言える。ここで、位相平面において角度  $\pi/2$  だけ位相回転させる回転作用素を

$$\hat{U} = \exp\left[\frac{\pi}{2} \hat{a}^\dagger \hat{a}\right] \quad (4)$$

と表す。ただし、 $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$  は虚数単位であり、 $\hat{a}$  と  $\hat{a}^\dagger$  は光子消滅作用素と光子生成作用素である。この  $\hat{U}$  を用いると、 $\mathcal{S}_k$  は、 $|\alpha_{4k-3}\rangle = |\alpha^{(k)}\rangle$  として、

$$\mathcal{S}_k = \{|\alpha^{(k)}\rangle, \hat{U}|\alpha^{(k)}\rangle, \hat{U}^2|\alpha^{(k)}\rangle, \hat{U}^3|\alpha^{(k)}\rangle\} \quad (5)$$

となる。2組の4相PSK信号 $S_k$ と $S_l$ の各信号間の内積を並べた4次の正方行列 $\Gamma_{k,l}^{(4)}$ は、次式のように書ける。

$$\Gamma_{k,l}^{(4)} = \left[ \langle \alpha^{(k)} | (\hat{U}^{i-1})^\dagger \hat{U}^{j-1} | \alpha^{(l)} \rangle \right] \quad (6)$$

$$= \left[ \langle \alpha^{(k)} | \hat{U}^{j-i} | \alpha^{(l)} \rangle \right] \quad (7)$$

これより、 $\Gamma_{k,l}^{(4)}$ が巡回行列であることがわかる。したがって、 $\Gamma^{(4m^2)}$ は、 $m^4$ 個の巡回行列 $\Gamma_{k,l}^{(4)}$  ( $k, l \in \{1, 2, \dots, m^2\}$ )によりブロック分割でき、

$$\Gamma^{(4m^2)} = \begin{bmatrix} \Gamma_{1,1}^{(4)} & \Gamma_{1,2}^{(4)} & \cdots & \Gamma_{1,m^2}^{(4)} \\ \Gamma_{2,1}^{(4)} & \Gamma_{2,2}^{(4)} & \cdots & \Gamma_{2,m^2}^{(4)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma_{m^2,1}^{(4)} & \Gamma_{m^2,2}^{(4)} & \cdots & \Gamma_{m^2,m^2}^{(4)} \end{bmatrix} \quad (8)$$

のように表わされる。

### 3.3 小行列の分解

小行列 $\Gamma_{k,l}^{(4)}$ は巡回行列であるので、固有値、固有ベクトルを求める公式が知られている。実際に求めると、 $\Gamma_{k,l}^{(4)}$ のような4次の巡回行列に対しては、以下のような正規直交した固有ベクトルが得られる。

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2} [1, 1, 1, 1]^T, & \lambda_2 &= \frac{1}{2} [1, -1, 1, -1]^T \\ \lambda_3 &= \frac{1}{2} [1, i, -1, -i]^T, & \lambda_4 &= \frac{1}{2} [1, -i, -1, i]^T \end{aligned}$$

ただし、太字はベクトル、Tはベクトルの転置を表す。 $\Gamma_{k,l}^{(4)}$ の固有値を $\lambda_i^{(k,l)}$ と表すと、 $\Gamma_{k,l}^{(4)}$ は次式のように固有値分解できる。

$$\Gamma_{k,l}^{(4)} = \sum_{i=1}^4 \lambda_i^{(k,l)} \lambda_i \lambda_i^H \quad (9)$$

ただし、Hは行列の共役転置を表す。また、巡回行列の固有値を求める公式より、 $\Gamma_{k,l}^{(4)}$ の固有値を具体的に求めることができるが、表記の簡単化のため $\lambda_i^{(k,l)}$ と表している。ここで、全ての小行列 $\Gamma_{k,l}^{(4)}$ が $(k, l)$ に依らず同じ固有ベクトル $\lambda_i$ を持つが、固有値 $\lambda_i^{(k,l)}$ は $(k, l)$ に依存することに注意する。

### 3.4 グラム行列の分解

式(9)を式(8)に代入すると

$$\begin{aligned} \Gamma^{(4m^2)} &= \begin{bmatrix} \Gamma_{1,1}^{(4)} & \Gamma_{1,2}^{(4)} & \cdots & \Gamma_{1,m^2}^{(4)} \\ \Gamma_{2,1}^{(4)} & \Gamma_{2,2}^{(4)} & \cdots & \Gamma_{2,m^2}^{(4)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma_{m^2,1}^{(4)} & \Gamma_{m^2,2}^{(4)} & \cdots & \Gamma_{m^2,m^2}^{(4)} \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^4 A_i \otimes \lambda_i \lambda_i^H \end{aligned} \quad (10)$$

ただし、

$$A_i = \begin{bmatrix} \lambda_i^{(1,1)} & \lambda_i^{(1,2)} & \cdots & \lambda_i^{(1,m^2)} \\ \lambda_i^{(2,1)} & \lambda_i^{(2,2)} & \cdots & \lambda_i^{(2,m^2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_i^{(m^2,1)} & \lambda_i^{(m^2,2)} & \cdots & \lambda_i^{(m^2,m^2)} \end{bmatrix} \quad (11)$$

となる。 $\Gamma^{(4m^2)}$ がエルミートであることから、小行列に対し、

$$\left( \Gamma_{k,l}^{(4)} \right)^H = \Gamma_{l,k}^{(4)} \quad (12)$$

が成り立つ。式(9)より、

$$\left( \Gamma_{k,l}^{(4)} \right)^H = \sum_{i=1}^4 \left( \lambda_i^{(k,l)} \right)^* \lambda_i \lambda_i^H \quad (13)$$

であり、式(12)より、式(13)が式(9)と等しいので、結局、

$$\left( \lambda_i^{(k,l)} \right)^* = \lambda_i^{(l,k)} \quad (14)$$

が成立する。ただし、\*は複素共役を表す。したがって、式(11)の $A_i$ もまたエルミートである：

$$A_i^H = A_i, \quad i \in \{1, 2, 3, 4\} \quad (15)$$

このため、各 $A_i$ はスペクトル分解可能である。各 $A_i$ の固有値と対応する正規直交化された固有ベクトルをそれぞれ、 $a_j^{(i)}$ と $\mathbf{a}_j^{(i)}$ と書くと、 $A_i$ のスペクトル分解形式は、

$$A_i = \sum_{j=1}^{m^2} a_j^{(i)} \mathbf{a}_j^{(i)} \mathbf{a}_j^{(i)H} \quad (16)$$

となる。これを式(10)に代入すると、

$$\Gamma^{(4m^2)} = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^{m^2} a_j^{(i)} \mathbf{a}_j^{(i)} \mathbf{a}_j^{(i)H} \otimes \lambda_i \lambda_i^H \quad (17)$$

を得る。 $\{\mathbf{a}_j^{(i)}\}, \{\lambda_i\}$ はそれぞれ正規直交であるので、式(17)より、

$$\begin{aligned} \Gamma^{(4m^2)} \left( \mathbf{a}_j^{(i)} \otimes \lambda_i \right) &= a_j^{(i)} \left( \mathbf{a}_j^{(i)} \otimes \lambda_i \right) \\ (i &= 1, 2, 3, 4, j = 1, 2, \dots, m^2) \end{aligned} \quad (18)$$

が成り立つ。これより、グラム行列 $\Gamma^{(4m^2)}$ の固有値と固有ベクトルは、それぞれ $a_j^{(i)}$ と $\mathbf{a}_j^{(i)} \otimes \lambda_i$ だとわかる。

## 4 おわりに

本稿では、 $4m^2$ 次の正方行列である $4m^2$ 元QAM信号のグラム行列 $\Gamma^{(4m^2)}$ の固有値と固有ベクトルを求めるためには、その $\frac{1}{4}$ のサイズである $m^2$ 次の正方行列 $A_i$  ( $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ )の固有値 $a_j^{(i)}$ と固有ベクトル $|\mathbf{a}_j^{(i)}\rangle$  ( $j \in \{1, 2, \dots, m^2\}$ )を求めれば十分であることを示した。

## 参考文献

- [1] C. W. Helstrom, “Quantum detection and estimation theory,” Academic Press, 1976.
- [2] P. Hausladen, R. Jozsa, B. Schumacher, M. Westmoreland, and W. K. Wootters, “Classical information capacity of a quantum channel,” Phys. Rev. **A54**, pp.1869-1876, 1996.
- [3] M. Ban, K. Kurokawa, R. Momose, and O. Hirota, “Optimum measurements for discrimination among symmetric quantum states and parameter estimation,” Int. J. Theor. Phys. **36**, no.6, pp.1269-1288, 1997.

## 公表論文

- 1). 宮崎 龍輔, 吉田 真菜, 王 天澄, 高比良 宗一, 白田 毅, “非対称量子信号に対する通信路行列計算の簡単化,” 電子情報通信学会論文誌 B, Vol.J 105-B, No.03, pp.-, (採録決定).
- 2). R. Miyazaki, T. Wang, S. Takahira, and T. S. Usuda, “Simplification of the Calculation of the Channel Matrix for nm-ary AMPM Coherent-state Signals,” AQIS2021, Proceedings of AQIS2021, pp.117-120, (2021). 他6件(筆頭著者), 1件(第二著者)