

スカラー波動方程式のソース項同定問題に対する正則化解法

辻村 賢祐

指導教員：代田 健二

1 はじめに

本研究では、震源同定を代表例とするスカラー波動方程式のソース項同定問題に対する数値解法について考察する。本研究で対象とするのは、ソース項が変数分離系となっているスカラー波動方程式であり、時間にも依存する関数は既知とし、空間にも依存する関数を内部観測によるデータから同定する問題を考える。

$\Omega \subset \mathbb{R}^n (n = 2, 3)$ を滑らかな境界 $\partial\Omega$ をもつ有界かつ凸な領域とし、 T を観測時間の長さとする。このとき、本研究で対象とするスカラー波動方程式は以下のとおりである。

$$\begin{cases} u_{tt} - \nabla \cdot K(\mathbf{x}) \nabla u = \lambda(t) f(\mathbf{x}) & \text{in } \Omega \times (0, T], & (1) \\ u(\cdot, 0) = u_0, \quad u_t(\cdot, 0) = v_0 & \text{in } \Omega, & (2) \\ u = g & \text{on } \partial\Omega \times (0, T]. & (3) \end{cases}$$

ここで $\lambda(t)$ と $K(\mathbf{x})$ は与えられた関数であり、それぞれ次の条件を満たすとする。

$$\lambda \in C^\infty[0, +\infty); \quad \lambda(0) \neq 0, \quad (4)$$

$$K \in L^\infty(\Omega); K(\mathbf{x}) \geq K_0 > 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega. \quad (5)$$

また、(2) 式中の u_0, v_0 は与えられた関数であり、さらに次の式が成り立つことを仮定する。

$$u_0|_{\partial\Omega} = g(\cdot, 0), \quad v_0|_{\partial\Omega} = g_t(\cdot, 0).$$

また、 K_0 は与えられた正定数である。また、関数 g は既知である。さらに

$$f \in L^2((0, T); L^2(\Omega)), \quad u_0 \in H^1(\Omega), \quad v_0 \in H^1(\Omega),$$

とする。このとき順問題 (1) の解はただ一つ存在し、

$$u \in L^2((0, T); H^1(\Omega)), \quad u_t \in L^2((0, T); L^2(\Omega)),$$

$$u_{tt} \in L^2((0, T); H^{-1}(\Omega))$$

となる。

$\omega \subseteq \Omega$ とする。本研究で対象とする逆問題は、次のとおりである：

ソース項同定問題

与えられた内部観測 $\bar{u}(\mathbf{x}, t)$ ($(\mathbf{x}, t) \in \omega \times (0, T]$) よりソース項関数 $f(\mathbf{x})$ を同定せよ。

倉敷は1次元波動方程式族の係数同定逆問題に対して、 H^1 勾配法 [1] を元に安定な数値解法を提案した [2]。本研究ではスカラー波動方程式のソース項同定問題に対して、倉敷の提案した数値解法を元に、数値的に安定した数値解法を開発することを目的とする。

2 ソース項同定問題に対する H^1 勾配法

ソース項同定問題を解く手法として、随伴変数法を採用する。未知のソース項 $f(\mathbf{x})$ を、次の汎関数 $J: L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}_+ := [0, \infty)$ の最小化問題を解くことで同定する。

$$J(f) = \int_0^T \int_\omega \frac{|u[f] - \bar{u}|^2}{\|\bar{u}\|^2} dx dt.$$

ここで $u[f]$ は、 f が与えられたときの (1) の解である。また、

$$\|\bar{u}\| := \left(\int_0^T \int_\omega |\bar{u}|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

汎関数の最小化関数を求めるために抽象勾配法 [1] を用いる。そのため汎導関数と双一次形式の選択が必要となる。汎導関数導出のための次の定理が成り立つ。

定理

$\forall f_1, \forall f_2 \in L^2(\Omega)$ に対して、次式が成り立つ。

$$J(f_1) - J(f_2) = \int_0^T \int_\Omega \lambda(t) \delta f(\mathbf{x}) w(\mathbf{x}, t) dx dt + \frac{1}{\|\bar{u}\|^2} \int_0^T \int_\omega (u_1 - u_2)^2 dx dt.$$

ここで $w(\mathbf{x}, t)$ は次の問題 (6), (7), (8) の解である。

$$\begin{cases} w_{tt} - \nabla \cdot K(\mathbf{x}) \nabla w = \frac{2(u[f] - \bar{u})\chi_\omega(\mathbf{x})}{\|\bar{u}\|^2} & \text{in } \Omega \times (0, T], & (6) \\ w(\cdot, T) = w_t(\cdot, T) = 0 & \text{in } \Omega, & (7) \\ w = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0, T], & (8) \end{cases}$$

ここで関数 $\chi_\omega(\mathbf{x})$ は、 $\chi_\omega(\mathbf{x}) = 1, \mathbf{x} \in \omega, \chi_\omega(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in \Omega \setminus \omega$ を満たす。

ここで随伴問題 (6), (7), (8) は適切である。この定理により、次のとおりに汎関数の Gâteaux 微分を得ることができる。

定理

汎関数 $J(f)$ は Gâteaux 微分可能であり、次の式が成り立つ。

$$\frac{d}{d\epsilon} J(f_1 + \epsilon \delta f)|_{\epsilon=0} = \int_0^T \int_\Omega \lambda(t) \delta f(\mathbf{x}) w(\mathbf{x}, t) dx dt.$$

定理 4.2 より汎関数の導関数は次のとおりに得ることができる。

$$\left\langle \frac{dJ}{df}, \delta f \right\rangle = \int_0^T \int_\Omega \lambda(t) w(\mathbf{x}, t) \delta f dx dt.$$

3 H^1 勾配法

汎関数の最小化関数は、抽象勾配法による反復過程で求める。

$$f_{k+1} = f_k + \epsilon_k \frac{s^k}{\|s^k\|_{H^1}} \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (9)$$

$\epsilon_k > 0$ は適切に選択された探索幅であり、 $\|\cdot\|_{H^1}$ は H^1 ノルムである。探索方向 s^k は H^1 勾配法 [1] により求める。すなわち、汎関数 J の導汎関数を用いた次の問題の解により定めることにする。

$$a(s, \varphi) = - \left\langle \frac{dJ}{df}, \varphi \right\rangle, \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega). \quad (10)$$

$a(\cdot, \cdot)$ は、次に定義される $H^1(\Omega)$ 上の有界かつ強圧的な双一次形式である。ここで $(\cdot, \cdot)_{L^2}$ は L^2 内積であり、 $\alpha > 0$ は与えられた正定数である。

$$a(s, \varphi) = \alpha (\nabla s, \nabla \varphi)_{L^2} + (s, \varphi)_{L^2}.$$

提案手法のアルゴリズムは、次のとおりである。

Algorithm 1 ソース項同定逆問題に対する同定アルゴリズム

- 1: $f_0 \in L^2(\Omega)$ を与える.
- 2: $k = 0$
- 3: **repeat**
- 4: 順問題 (1), (2), (3) 解き $u(\mathbf{x}, t)$ を求める.
- 5: 随伴問題 (6), (7), (8) を解き $w(\mathbf{x}, t)$ を求める.
- 6: 式 (10) を解き探索方向 s_k を求める.
- 7: ステップサイズ ε_k を決定する.
- 8: (9) よりソース項関数を更新する.
- 9: 設計変数関数を用いて順問題 (1), (2), (3) を解く.
- 10: 汎関数 $J(f_{k+1})$ を計算する.
- 11: $k = k + 1$
- 12: **until** $J(f_k) < \varepsilon$

4 数値実験

提案手法の有効性を、数値実験により検証する。数値実験で用いた設定は、表 1 のとおりである。数値実験は有限要素法ソフトウェア FreeFem++4.2-1[3] を使用して行う。順問題、随伴問題を解く際、有限要素法を用いる。要素分割として三角形一時要素、解法として HHT 法を用いる。また、観測データは三角形二次要素とニューマーク法を用いて順問題を解くことで作成する。

表 1 数値実験

Dirichlet 境界関数 g	0
初期値 u_0	0
初速度 v_0	0
係数 $K(x, y)$	1
$\lambda(t)$	$\cos 2t$
真の解 $f(x, y)$	$e^{-12(x^2+y^2)}$
初期関数 f_0	0
領域 Ω	$[-1, 1] \times [-1, 1]$
観測時間 T	2
空間分割	30×30
時間分割	800

まず観測領域 ω の同定結果への影響について検討する。本実験では観測誤差は加えていない。図 2 と図 3 は観測領域 ω を示した図であり、色がついている部分が ω に該当する。図 5 は ω が図 2 のときの同定結果、図 6 は ω が図 3 のときの同定結果である。2 つの同定結果を比較すると図 6 の方がピークのおよび値ともに精度がよいことがわかる。この結果から、同定精度は、観測領域の大きさだけでなく、位置にも大きく依存すると考えられる。

次に H^1 係数 α の影響について検討する。測定データに観測誤差 5% を加えて、実験を行う。観測領域は図 4 である。 $\alpha = 10^{-12}$ のときの同定結果の絶対誤差分布を図 7 に、 $\alpha = 10^{-2}$ のときの同定結果の絶対誤差分布を図 8 に示す。2 つの結果から、観測誤差に起因する振動現象が見られる。また、結果を比較すると、振動現象は H^1 係数が大きいほど抑制している。よって H^1 係数 α を適切に与えることで、観測誤差に起因する振動

現象を抑制できる可能性があると考えられる。

数値実験により、十分な観測時間 T が与えられ、適切な観測領域の大きさと位置でデータを観測できれば、提案アルゴリズムにより一定精度で同定できる可能性があることが示唆された。また、 H^1 係数 α を適切に与えることで観測誤差に起因する振動現象を抑制する可能性も示すことができた。今後の課題は、アルゴリズムの収束性についての理論検討、適切な H^1 係数 α の自動的な選択方法の検討、そしてより実用に近い問題への開発手法の適用である。

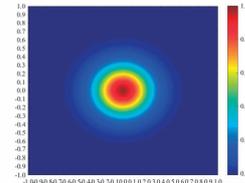


図 1 exact f

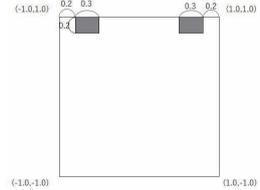


図 2 観測領域 1

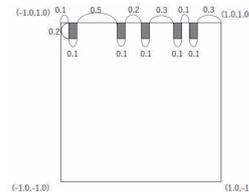


図 3 観測領域 2

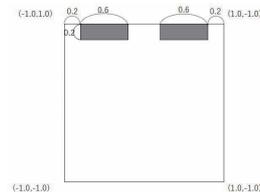


図 4 観測領域 3

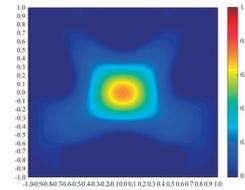


図 5 同定結果 (領域 1)

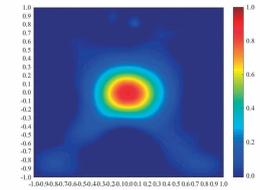


図 6 同定結果 (領域 2)

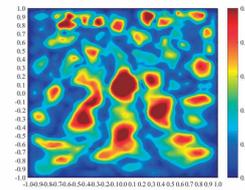


図 7 絶対誤差分布 ($\alpha = 10^{-12}$)

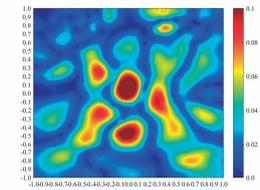


図 8 絶対誤差分布 ($\alpha = 10^{-2}$)

参考文献

- [1] 畔上秀幸, 形状最適化問題, 森北出版, 2016.
- [2] D. Kurashiki and K. Shirota, H^2 gradient method for the coefficient identification problem in a partial differential equation, JSIAM Letters, Vol. 10, pp. 37–40, 2018.
- [3] Hecht, F. New development in FreeFem++, Journal of numerical mathematics, Vol. 20, no 3–4, pp. 251–266, 2012.