# 混合状態信号に対するグラム行列と準最適測定に関する研究

情報科学科　佐原 悠太　　　指導教員：臼田 毅

## 1　はじめに

混合状態信号に対するグラム行列理論に関して，Holevo らによって，量子通信路符号化定理の証明という成功をもたらしたが，残念ながらそれ以上の発展はほとんどない．本研究では，混合状態信号を用いて具体的な計算を行い，混合状態信号系に対するグラム行列理論の発展を目指す．

## 2　Holevo-Schumacher-Westmoreland のグラム行列と準最適測定

Holevo-Schumacher-Westmoreland のグラム行列は，$M$ 元混合状態信号系 $\{\rho_i \mid i = 1, 2, \ldots, M\}$ を考えたとき，

$$\Gamma = \left[\langle \hat{e}_j^{(i)} | \hat{e}_{j'}^{(i')} \rangle\right]$$

のように定義される．ここで，$D$ を $j$ の集合とし，$\rho$ のサポート空間が $d$ 次元の場合, $D = \{1, 2, \ldots, d\}$ である．Holevo らは, 古典情報理論における典型的系列に対応する固有値 $\lambda_j$ の集合が, $\{\lambda_j \mid j \in B \subset D\}$ であるとき, 固有ベクトル $\{|e_j\rangle \mid j \in B \subset D\}$ で張られる部分空間を典型的部分空間と呼んだ．本稿では，$D$ の適当な部分集合を $B$ として，$B$ に対応する部分空間を考える．$|\hat{e}_j^{(i)}\rangle$ は，$\rho$ の各固有ベクトル $|e_j^{(i)}\rangle$ に対し上記の部分空間への射影を行ったベクトルである．

次に，純粋状態信号系でグラム作用素と呼ばれる作用素を以下に示す．

$$\Phi = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j \in B_i} |\hat{e}_j^{(i)}\rangle\langle \hat{e}_j^{(i)}|$$

そして，彼らが定義した準最適測定 $\{X_i \mid i = 1, 2, \ldots, M\}$ の決定作用素 $X_i$ は,

$$X_i = \sum_{j \in B_i} \Phi^{-(1/2)} |\hat{e}_j^{(i)}\rangle\langle \hat{e}_j^{(i)}| \Phi^{-(1/2)}$$

である．

## 3　2 次元混合状態信号に対するグラム行列と準最適測定

本研究で扱う信号系を，2 元信号 $\{\rho_1, \rho_2\}$ とし，それぞれ次式で与えられるものとする．

$$\rho_1 = \begin{bmatrix} 1-f & 0 \\ 0 & f \end{bmatrix}, \qquad \rho_2 = R(\theta)\rho_1 R(\theta)^\dagger$$

ただし，$R(\theta)$ は回転行列である．また，$f$ $(0 \le f \le 1)$ は古典雑音量を表すパラメータである．

続いて，各信号の量子状態の固有ベクトルを求める．$\rho_1$ の固有ベクトルは,

$$|e_1^{(1)}\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad |e_2^{(1)}\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

であり，$\rho_2$ の固有ベクトルは,

$$|e_1^{(2)}\rangle = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}, \qquad |e_2^{(2)}\rangle = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

である．

混合状態信号に対するグラム行列は，信号のインデックス $i$（及び $i'$）と固有ベクトルの番号 $j$（及び $j'$）により，$(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = ((i, j), (i', j'))$ 成分を持つ行列となる．まずは，2 章で定義した部分空間 $B$ を全空間として考えると，

$$\begin{aligned}\Gamma &= \left[\Gamma_{(i,j),(i',j')}\right] \\ &= \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} (1,1) & (1,2) & (2,1) & (2,2) \end{array} \\ \begin{array}{c} (1,1) \\ (1,2) \\ (2,1) \\ (2,2) \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & 1 & \sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta & 1 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}\end{aligned}$$

準最適測定において，部分空間 $B_i$ として全空間を考えたとき，$X_1 = X_2 = \frac{1}{2} I_2$ となり，この測定 $\{X_1, X_2\}$ は，ランダムに結果 1 と 2 を出力する測定であり，信号識別能力は全くないことになる．

## 4　部分空間の導入

ここで，全空間を考えるのではなく，本研究では Holevo らが用いた典型的部分空間とは違うが，何らかの部分空間を考える．ここで，もっとも自然な部分空間は，$0 \le f < \frac{1}{2}$ を仮定したときの $\rho_i$ の第 1 固有値に対応する 1 次元の空間となる．このため，$j = 1$ のみを考えるので，$B_i = 1$ ということになる．このときの決定作用素は,

$$\begin{aligned} X_1 &= \Phi^{-(1/2)} |e_1^{(1)}\rangle\langle e_1^{(1)}| \Phi^{-(1/2)} \\ X_2 &= \Phi^{-(1/2)} |e_1^{(2)}\rangle\langle e_1^{(2)}| \Phi^{-(1/2)} \end{aligned}$$

となる．ここで $|e_1^{(i)}\rangle\langle e_1^{(i)}| = \rho_i|_{f \to 0}$ であることに着目すると，このようにしてつくった測定は，純粋状態信号に対する SRM となっていることがわかる．すなわち，決定作用素 $X_1, X_2$ は，いわゆる「純粋状態信号に対する量子最適決定作用素」となる．ここで，以前の我々の成果から，2 次元信号系については「純粋状態信号に対する最適決定作用素は混合状態信号に対しても最適」となることが分かっている [1]．したがって，決定作用素 $X_1, X_2$ は混合状態信号に対しても最適となるので「良い測定」であることがわかる．

## 5　まとめ

本研究では，グラム行列理論と「良い測定」を結びつける条件が，混合状態信号系においては，適切な部分空間の導入にあることを考察した．

## 参考文献

[1] 藤原祐二, 臼田毅, 内匠逸, 畑雅恭, “純粋状態信号に対する量子最適決定作用素の混合状態信号に対する適用可能性,” 信学論 **vol.J84-A**, no.1, pp.63-72, (2001).

## 公表論文

1. **佐原 悠太**, 宮崎 龍輔, 五十川 翔梧, 王 天澄, 臼田 毅, “混合状態信号に対するグラム行列”, 令和 3 年度電気・電子・情報関係学会東海支部連合大会, D5-4, (2021).