量子通信における量子測定過程の幾何学的表現に関する研究

五十川 翔梧　　　指導教員：臼田 毅

1　はじめに

量子測定の数学的な記述は，正作用素値測度 POVM (positive operator-valued measure) によって与えられる [1]．Belavkin は，今日 BWSRM (Belavkin weighted square-root measurement) [2] と呼ばれる測定を数学的に定義している．BWSRM は，量子測定理論の中で重要な，SRM (square-root measurement) [3] の一般化であり，Belavkin weight と呼ばれる重みを様々に変えることで多様な量子測定を与えるものである．

BWSRM について，純粋状態の場合，重みはスカラーであったことから，最適な重みを探索することで効率よく最適測定を得ることができた．しかし，混合状態の場合，重みは行列であることから，必ずしも効率的ではない．したがって，重みのクラスを限定し，パラメータ数を削減することが望まれる．

本稿では，混合状態信号に対する BWSRM の幾何学的表現を考察し，重みを対角行列に限定した場合でもヒルベルト空間全体をカバーすることを示す．

2　基礎知識

2.1　量子状態と密度作用素

量子状態は，物理系に関する情報全てが含まれているものであり，任意の測定を行った際に得られる測定値の確率分布の情報が全て入っているという意味で，確率分布の一般化と言われることもある．一般に，任意の量子状態はヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上のエルミート作用素 ρ で記述され，これを密度作用素と呼ぶ．密度作用素は，

$$\rho \geq 0 \tag{1}$$
$$\mathrm{Tr}\,\rho = 1 \tag{2}$$
$$\mathrm{Tr}\,\rho^2 \leq 1 \tag{3}$$

を満たす．ただし，Tr は作用素のトレースである．式 (3) で等号が成り立つときが純粋状態，厳密な不等式が成り立つときが混合状態である．

2.2　量子測定

量子測定は一般に，positive operator-valued measure (POVM) $\Pi = \{\Pi_j \mid j = 1, 2, \ldots, M\}$ によって数学的に記述される．Π の各要素 Π_j は，決定作用素と呼ばれ，以下の条件を満たすエルミート作用素となる．

$$\Pi_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{M} \Pi_j = I \tag{4}$$

ここで，I は $\mathcal{H}$ 上の恒等作用素を表す．

ある量子状態信号 ρ_i の測定結果が古典情報 j となるときの条件付き確率 $P(j|i)$ は

$$P(j|i) = \mathrm{Tr}\left(\rho_i \Pi_j\right) \tag{5}$$

で与えられる．そのため，識別成功の平均確率 P_{C} は，以下のように表すことができる．

$$P_{\mathrm{C}} = \sum_{i=1}^{M} \xi_i \,\mathrm{Tr}\left(\rho_i \Pi_i\right) \tag{6}$$

なお，$1 - P_{\mathrm{C}}$ は識別誤りの平均確率を表す．最大識別成功率 $P_{\mathrm{C}}^{(\mathrm{opt})}$ は

$$P_{\mathrm{C}}^{(\mathrm{opt})} = \max_{\Pi} P_{\mathrm{C}} \tag{7}$$

であり，この最適値を達成する Π を量子最適測定と呼び，この測定を行う受信機のことを量子最適受信機と呼ぶ．

2.3　BWSRM

BWSRM (Belavkin weighted square-root measurement) [2] について説明する．M 元量子状態信号系 $\{\rho_i \mid i = 1, 2, \ldots, M\}$ に対し，BWSRM の POVM $\Pi = \{\Pi_j \mid j = 1, 2, \ldots, M\}$ は以下のように定義される．

$$\Pi_j = G^{-1/2} \psi_j W_j \psi_j^{\dagger} G^{-1/2} \tag{8}$$

ただし，

$$G = \sum_{k=1}^{M} \psi_k W_k \psi_k^{\dagger} \tag{9}$$

である．Π_j は式 (4) を満たす．W_j は，BWSRM において，Belavkin weight と呼ばれる重みであり，信号状態が純粋状態であるとき，W_j はスカラーである．一方で，信号状態が混合状態であるとき，W_j は半正定値エルミートの d_j 次正方行列となる．

3　混合状態信号に対する BWSRM の幾何学的表現

本節では混合状態信号に対する BWSRM の幾何学的表現について考察する．信号として，2 次元系の 2 元混合状態信号を考え，信号に対応するベクトルと BWSRM の決定作用素に対応するベクトルを 2 次元平面上に図示する．また，重みを限定した BWSRM がヒルベルト空間に対してカバーする範囲について視覚的に明らかにする．

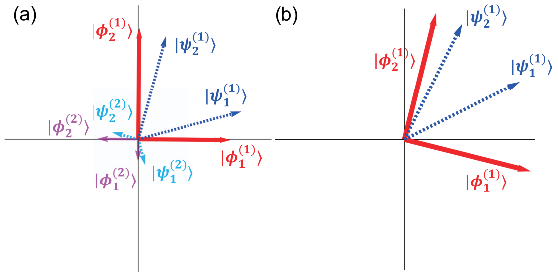

図 1　2 元混合状態信号に対する BWSRM の幾何学的表現の例．(a) $f = 0.2, \theta = \frac{\pi}{3}, W_1 = 0.4I, W_2 = 0.6I$．(b) $f = 0.01, \theta = \arccos(0.8), W_1 = \mathrm{diag}(0.1, 0), W_2 = \mathrm{diag}(0.9, 0)$．

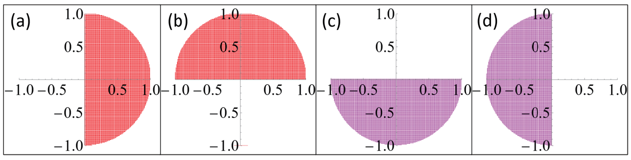

図 2　2 元混合状態信号に対して，重みを対角行列に限定した BWSRM のカバーする範囲．(a) $|\phi_1^{(1)}\rangle$, (b) $|\phi_2^{(1)}\rangle$, (c) $|\phi_1^{(2)}\rangle$, (d) $|\phi_2^{(2)}\rangle$.

3.1　BWSRM の幾何学的表現

BWSRM の幾何学表現として，決定作用素 Π_j の k 番目の固有値に対応する固有ベクトルを固有値でスケーリングした

$$|\phi_j^{(k)}\rangle = \mu_j^{(k)}|\mu_j^{(k)}\rangle \tag{10}$$

を定義し，この $|\phi_j^{(k)}\rangle$ を 2 次元平面上に図示する．

例として，2 元混合状態信号に対する BWSRM は，図 1 のように描かれる．ただし，図中の $|\psi_i^{(k)}\rangle$ は受信信号に対応するベクトルを表し，図 1-(b) において，第 2 固有値に対応するベクトルのノルムが 0 に近いことから，図示を省略し，第 1 固有値に対応するベクトルのみを描いている．

3.2　重みを限定した BWSRM のカバーする範囲

次に重みのクラスを対角行列に限定した BWSRM が，測定全体に対してカバーする範囲を調べる．重み変動により，BWSRM の決定作用素に対応するベクトルは，それぞれ図 2(a)-(d) の塗りつぶし部分の範囲で変化することが分かった．本来，BWSRM の重みは対角行列に限定されないが，図 2 より，限定的な BWSRM のクラスがヒルベルト空間全体を概ねカバーしていることが言える．このことから，最適測定を達成する BWSRM を探索する際，重みとして，すべての半正定値エルミートの正方行列を探索するのではなく，対角行列を探索すれば十分であることが示唆される．

4　まとめ

混合状態信号に対する BWSRM の幾何学的表現を行い，重みを対角行列とする限定的な BWSRM でもヒルベルト空間全体をカバーすることを示した．この結果は，限定された BWSRM が任意の BWSRM を表現できることを示唆するため，最適測定となる重みを探索する際に，対角行列となる重みを調べれば十分であることが考えられる．実際，[4] では重みを対角行列に制限した BWSRM の中に最適測定を達成する重みが存在することが数値的に示されている．

以上の結果の数学的な証明，さらに多次元系の多元信号においても成り立つかどうかを検討することが今後の課題として挙げられる．また，重みのクラスを限定して最適解が得られることがわかった場合，専用の探索アルゴリズムを開発することも今後の課題と言える．

参考文献

[1] C.W. Helstrom, *Quantum Detection and Estimation Theory*, Academic Press, New York, (1976).

[2] V.P. Belavkin, “Optimum distinction of non-orthogonal quantum signals,” Radio Eng. Electron. Phys. **20**, pp.39-47, (1975).

[3] P. Hausladen et al., “Classical information capacity of a quantum channel,” Phys. Rev. **A54**, pp.1869-1876, (1996).

[4] 宮地謙吾, 五十川翔梧, 王天澄, 臼田毅, “2 元混合状態信号に対する量子測定 BWSRM の最適重みについて,” 令和 4 年度電気・電子・情報関係学会東海支部連合大会, E1-7, (2022).

公表論文

1. **五十川翔梧**, 中川綾太, 王天澄, 高比良宗一, 臼田毅, 純粋状態信号に対する Belavkin Weighted Square-root Measurement の幾何学的表現, 電子情報通信学会論文誌 (B), vol.J105-B, no.3, pp.62-73, 2022.
2. **S. Ioskawa**, K. Miyachi, T. Wang, S. Takahira, T.S. Usuda, “Geometric representation and optimum weights of the BWSRM for binary mixed state signals,” 2022 International Symposium on Information Theory and Its Applications (ISITA2022), Proceedings of ISITA2022, p.218, 2022.
3. **S. Ioskawa**, K. Miyachi, T. Wang, S. Takahira, T.S. Usuda, “Geometric representation and optimum weight of the BWSRM for mixed state signals,” 22nd Asian Quantum Information Science Conference (AQIS2022), Poster Number 19, 2022.

他，国際会議論文 1 件，学会発表 8 件