レベル付き 2 重 Eisenstein 級数とその関係式たち

北田 柊偉　　　指導教員：田坂 浩二

1　背景

自然数 $k_1 \geq 1, k_2 \geq 2$ に対して 2 重ゼータ値 $\zeta(k_1,k_2)$ を

$$\zeta(k_1,k_2) = \sum_{0<c_1<c_2} \frac{1}{c_1^{k_1} c_2^{k_2}}$$

で定義する. 18 世紀初め, Euler により研究されたこの級数は今では多重ゼータ値

$$\zeta(k_1,...,k_r) = \sum_{0<c_1<\cdots<c_r} \frac{1}{c_1^{k_1}\cdots c_r^{k_r}}$$

として一般化されている. 多重ゼータ値は, 整数論をはじめとした様々な分野と関連して研究が行われている. その研究の一つにモジュラー形式と 2 重ゼータ値に関する研究がある. モジュラー形式とは, ある対称性を持った正則関数で Fourier 展開 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n (q = e^{2\pi i\tau}, \tau \in \{c \in \mathbb{C} | Im(c) > 0\})$ を持つようなものである. 2 重ゼータ値は実数値であり, モジュラー形式は関数であることから, この 2 つの対象には何ら関係がないように思われる. しかし 1994 年, Zagier[1] によって次の予想とともに両者に直接的な関係があることが示唆された.

予想 1.1 (Zagier[1]). 自然数 $k \geq 3$ に対し,

$$\dim_{\mathbb{Q}} DZ_k = \left[\frac{k+1}{2}\right] - 1 - \dim_{\mathbb{C}} S_k(SL_2(\mathbb{Z}))$$

ここで, $DZ_k := \langle \zeta(j,k-j) | 1 \leq j \leq k-2 \rangle_{\mathbb{Q}}$ である. $S_k(SL_2(\mathbb{Z}))$ は, 重さ k の $SL_2(\mathbb{Z})$ のカスプ形式からなる $\mathbb{C}$ ベクトル空間である.

この予想について, 次の不等式が知られている.

定理 1.2 (Gangl-金子-Zagier[2]). 自然数 $k \geq 3$ に対し,

$$\dim_{\mathbb{Q}} DZ_k \leq \left[\frac{k+1}{2}\right] - 1 - \dim_{\mathbb{C}} S_k(SL_2(\mathbb{Z}))$$

Gangl-金子-Zagier[2] では, 2 通りの証明が与えられている. 一つは 2 重 Eisenstein 級数を用いたものである. 2 重 Eisenstein 級数とは, 自然数 $k_1 \geq 2, k_2 \geq 3$ に対して次の級数で定義される複素上半平面上の正則関数である：

$$G_{k_1,k_2}(\tau) = \sum_{0<\lambda_1<\lambda_2} \frac{1}{\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}} \tag{1}$$

ここで, 複素数 λ_j は $\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$ の格子点 $\lambda_j = m_j\tau + c_j$ $(m_j, c_j \in \mathbb{Z})$ であり, $m_j\tau + c_j > 0$ は $m_j > 0, c_j \in \mathbb{Z}$ もしくは $m_j = 0, c_j > 0$ のいずれかであると定義する. $m_1\tau + c_1 < m_2\tau + c_2$ は $0 < (m_2 - m_1)\tau + (c_2 - c_1)$ により定義する. 収束条件 $k_2 \geq 3$ は, 和に関する極限をとることで $k_2 \geq 2$ とすることができる.

2 重 Eisenstein 級数 $G_{k_1,k_2}(\tau)$ は τ に関する周期関数であることから, Forier 展開をもつ. その定数項は $\zeta(k_1,k_2)$ であり, この事と $S_k(SL_2(\mathbb{Z}))$ が重さ k の 2 重 Eisenstein 級数で生成される $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間 $DE_k := \langle G_{j,k-j}(\tau) | 1 \leq j \leq k-2 \rangle_{\mathbb{Q}}$ の部分空間である事, 及び DE_k の次元公式 $\dim_{\mathbb{Q}} DE_k = [\frac{k+1}{2}]$ を合わせて, 定理 1.2 の不等式が得られる.

もう一つの証明は, 2 重ゼータ値の関係式とカスプ形式の周期多項式を直接結びつける結果から得られる. なぜこのような現象が起きるのか, その本質を突いた説明は未だ為されていない.

2　先行研究

モジュラー形式には, 「レベル」という構造が加わったレベル N のモジュラー形式 (カスプ形式) というものが存在する. これは整数論の研究において非常に重要で, 古くから研究がされてきた. レベル N のカスプ形式からなる $\mathbb{C}$ ベクトル空間を $S_k(N)$ と表記する. このレベル N のカスプ形式との対応を期待して, レベル N の 2 重ゼータ値とレベル N の 2 重 Eisenstein 級数が導入され, Gangl-金子-Zagier の高レベル化を模索する研究がなされている. ここでレベル N の 2 重ゼータ値は, $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ と自然数 $k_1 \geq 1, k_2 \geq 2$ に対して

$$\zeta^{a_1,a_2}(k_1,k_2) = \sum_{\substack{0<c_1<c_2 \\ c_j \equiv a_j \mod N}} \frac{1}{c_1^{k_1} c_2^{k_2}}$$

で定義される. 同様に, レベル N の 2 重 Eisenstein 級数は $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ と自然数 $k_1 \geq 2, k_2 \geq 3$ に対して

$$G^{a_1,a_2}_{k_1,k_2}(\tau) = \sum_{\substack{0<\lambda_1<\lambda_2 \\ \lambda_j \equiv a_j \mod N}} \frac{1}{\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}}$$

で定義される. ただし, $m_j, c_j \in \mathbb{Z}$ に対して $\lambda_j = m_j N\tau + c_j$ である. これは $N = 2$ の場合に金子-田坂 [3], 一般の場合に Yuan-Zhao[4] により導入された.

金子-田坂のレベル 2 の先行研究では, レベル 2 の 2 重ゼータ値とレベル 2 のカスプ形式の対応として, 次の結果を得ている.

定理 2.1 (金子-田坂 [3]). 正の偶数 $k \geq 4$ に対して,

$$\dim_{\mathbb{Q}} DZ_k^{(2)} \leq \frac{k}{2} - 1 - \dim_{\mathbb{C}} S_k(2)$$

が成り立つ. ただし, $DZ_k^{(2)} := \langle \zeta^{1,1}(2r, k-2r) | 1 \leq r \leq \frac{k}{2} - 1 \rangle_{\mathbb{Q}}$ である.

定理 2.1 の証明方針は定理 1.2 と同じだが, 新しい部分は, $S_k(2)$ がベクトル空間

$$\langle G^{1,1}_{2r,k-2r}(\tau) | 1 \leq r \leq \frac{k}{2} - 1 \rangle_{\mathbb{Q}} \oplus \mathbb{Q}G^0_k(\tau) \oplus \mathbb{Q}G^1_k(\tau)$$

の部分空間になっていることを示す際に, 複シャッフル関係式と呼ばれる関係式を用いる点にある. レベル 3 以上の場合ではカスプ形式と 2 重ゼータ値との対応は明らかになっておらず, その本質的な問題はカスプ形式の空間が 2 重 Eisenstein 級数の部分空間であるかどうかだが, これもレベル 3 以上では明らかになっていないのが現状である.

3　研究目的

本研究の目的は, レベル 3 以上での 2 重ゼータ値とカスプ形式との対応を模索することである. この対応を得るには, カスプ形式の空間を部分空間として含むようなレベル N の 2 重

Eisenstein 級数の空間を見つけることが問題となるが, そのためにはレベル N の 2 重 Eisenstein 級数の関係式が必要となる. そこで本研究では基本的な関係式族である複シャッフル関係式などの開発を行う.

複シャッフル関係式とは, 多重ゼータ値の間に成り立つ 2 通りの積の差によって生じる線形関係式のことである. レベル N の 2 重ゼータ値の複シャッフル関係式は次で与えられる：

命題 3.1. $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ と自然数 $k_1, k_2 \geq 2$ に対して,

$$\begin{aligned}\zeta^{a_1}(k_1)\zeta^{a_2}(k_2) &= \zeta^{a_1,a_2}(k_1,k_2) + \zeta^{a_2,a_1}(k_2,k_1) + \delta_{a_1,a_2}\zeta^{a_1}(k)\\ &= \sum_{j=2}^{k-1}\left\{\binom{j-1}{k_1-1}\zeta^{a_2,a_1+a_2}(k-j,j)\right.\\ &\qquad\left.+\binom{j-1}{k_2-1}\zeta^{a_1,a_1+a_2}(k-j,j)\right\}.\end{aligned} \tag{2}$$

ただし, $k := k_1 + k_2$ である.

1 つ目の等式は級数表示に由来する積 (調和積) であり, 2 つ目の等式は積分表示に由来する積 (シャッフル積) である.

格子点の大小関係の定義から, $k_1, k_2 \geq 2$ に対して調和積をそのまま Eisenstein 級数に持ち上げた式

$$G_{k_1}^{a_1}(\tau)G_{k_2}^{a_2}(\tau) = G_{k_1,k_2}^{a_1,a_2}(\tau) + G_{k_2,k_1}^{a_2,a_1} + \delta_{a_1,a_2}G_{k_1+k_2}^{a_1}(\tau)$$

が成り立つことがわかる. 一方, シャッフル積関係式は計算の過程で未定義の $G_{1,k-1}^{a_1,a_2}(\tau)$ があらわれる. 本研究の主結果の 1 つは, シャッフル積を満たす新たな q 級数 $G_{k_1,k_2}^{ш,a_1,a_2}(\tau) \in \mathbb{C}[[q]]$ を具体的に構成したことである.

4 主結果

定理 4.1. シャッフル積を満たす q 級数 $G_{k_1,k_2}^{ш,a_1,a_2}(\tau) \in \mathbb{C}[[q]]$ が存在し, 自然数 $k_1, k_2 \geq 2$ に対して

$$G_{k_1,k_2}^{ш,a_1,a_2}(\tau) = G_{k_1,k_2}^{a_1,a_2}(\tau)$$

が成り立つ.

具体的な構成方法は修士論文を参照されたい. シャッフル積の一例として次の関係式が得られる：

$$G_2(\tau)G_3(\tau) = 6G_{1,4}^{ш}(\tau) + 3G_{2,3}^{ш}(\tau) + G_{3,2}^{ш}(\tau).$$

これと調和積との差を取れば, 関係式

$$G_5(\tau) = 6G_{1,4}^{ш}(\tau) + 2G_{2,3}^{ш}(\tau)$$

を得る.

レベル N の多重ゼータ値の基本関係式の一つに, 和公式及び分配公式と呼ばれるものがある. これらは, 我々の 2 重 Eisenstein 級数にもちあがることがわかった.

定理 4.2 (和公式)**.** $k \geq 4$ かつ偶数に対して,

$$2\sum_{j=2}^{k-2}\left((-1)^{j-1}G_{k-j,j}^{ш,a,a}(\tau) + G_{k-j,j}^{ш,a,2a}(\tau)\right) + 4G_{1,k-1}^{ш,a,2a}(\tau) = G_k^a(\tau)$$

が成り立つ.

定理 4.3 (Distribution rel.)**.** 自然数 $k_1 \geq 1, k_2 \geq 2$ に対して,

$$\sum_{a_1,a_2 \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} G_{k_1,k_2}^{ш,a_1,a_2}(\tau) = G_{k_1,k_2}^{ш}(N\tau)$$

が成り立つ.

モジュラー形式との関係を論じるため, 数値実験を行ったところ, 次の予想を得ることができた.

予想 4.4. 重さ 4 のレベル 4 のモジュラー形式はレベル 4 の 1 重と 2 重の Eisenstein 級数 $\tilde{G}_{2,2}^{0,0}(\tau), \tilde{G}_{2,2}^{2,2}(\tau), \tilde{G}_4^0(\tau), \tilde{G}_4^2(\tau)$ の $\mathbb{Q}$ 係数一次結合で書ける.

例えば, 重さ 4 の $\Gamma_0(4)$ の基底の一つである $f = q + 28q^3 + 126q^5 + 344q^7 + 757q^9 + \mathcal{O}(q^{10})$ は,

$$f = \frac{1024}{3}\tilde{G}_{2,2}^{0,0}(\tau) + \frac{1024}{3}\tilde{G}_{2,2}^{2,2}(\tau) + 672\tilde{G}_4^0(\tau) - \frac{2080}{3}\tilde{G}_4^2(\tau)$$

と書けることが数値実験から予想された. ただし, $\tilde{G}_{j,k-j}^{a_1,a_2}(\tau)$ は $G_{j,k-j}^{a_1,a_2}(\tau)$ を $(2\pi i)^k$ で割ったものとする. 一般の重さでもこのような予想が得られるのか, 引き続き数値実験を行い数学的な証明を試みる. また, 本研究ではカスプ形式と 2 重ゼータ値の具体的な対応を得ることはできなかった. どのような場合に 2 重ゼータ値とカスプ形式の対応が現れるのか, 今後の課題としたい.

5 まとめ

本研究ではレベル N のカスプ形式とレベル N の 2 重ゼータ値の新たな対応を模索するための準備として, レベル N の 2 重 Eisenstein 級数の関係式たちを導いた. レベル N の 2 重 Eisenstein 級数そのものではシャッフル積を満たさないことが問題となっていたため, レベル N の 2 重 Eisenstein 級数の定義の拡張を行い, 基本的な関係式族である複シャッフル関係式及び和公式と Distribution relation を導いた. 今後は, 本研究で得られた結果と予想 4.4 をもとにレベル 3 以上のカスプ形式と 2 重ゼータ値の結びつきを証明することが目標である.

参考文献

[1] D. Zagier, *Values of zeta functions and their applications*, in First European Congoess of Mathematics, Volume II, Progress in Math., 120, (1994), 497-512.

[2] H. Gangl, M. Kaneko, D. Zagier, *Double zeta values and modular forms*, Automorphic forms and Zeta functions, Proceedings of the conference in memory of Tsuneo Arakawa, World Scientific, (2006), 71-106.

[3] M. Kaneko, K. Tasaka, *Double zeta values, double Eisenstein series, and modular forms of level 2*, Math. Ann. **357**(3) (2013), 1091-1118.

[4] H. Yuan, J. Zhao, *Double Shuffle Relations of Double Zeta Values and Double Eisenstein Series of Level N*, arXiv:1401.6699