量子情報源に対する2次のレニーサブエントロピーの性質

情報科学学科　湯原 隼斗　　　指導教員：臼田 毅

1　はじめに

量子情報理論において，量子状態により情報が担われ，送られてきた量子状態を測定することで，受信者は情報を得る．量子状態は，数学的には d 次元複素ヒルベルト空間の単位ベクトル $|\psi_i\rangle$ によって表され，量子情報源は，量子状態の集合 $\{|\psi_i\rangle\}_{i=1}^m$ と，その集合に含まれる量子状態 $|\psi_i\rangle$ に対応する生起確率 p_i の組として表される．さらに，この量子情報源に対して，対応する d 次元複素ヒルベルト空間上の密度作用素 $\rho = \sum_{i=1}^m p_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ を考えることができる．量子測定は，数学的には正作用素値測度 (POVM) と呼ばれ，d 次元複素ヒルベルト空間上の半正定値作用素 Π_i の集合 $\Pi = \{\Pi_i : \sum_{i=1}^n \Pi_i = I\}$ で表される．また，最適量子測定による最大の相互情報量 (アクセシブル情報量) の下界にサブエントロピーがあることが知られている [1].

サブエントロピーは，密度作用素を引数として計算されるアクセシブル情報量の下界である．同じ密度作用素をもつ様々な量子情報源の中に必ずこの下界を達成する量子情報源が存在することから，最良の下界と呼ばれている．このような下界を達成する量子情報源は，相手に与える情報量が少ないため，セキュリティに応用できると期待されている．文献 [3] では，ある古典的通信路を考えたとき，サブエントロピーが相互情報量と一致することが示されており，シャノンの通信路符号化定理を通し，サブエントロピーが操作的な意味を持つことが明らかにされている．また，最近，量子情報理論の分野で相互情報量を拡張したレニー情報量の重要性が指摘されている [4]．このため，本研究では，F. Mintert らがサブエントロピーを拡張して導入したレニーサブエントロピーに注目した．

本研究では，特に，レニーサブエントロピーの操作的意味を考える [2]．一般に，実数 q に対して q 次のレニーサブエントロピーを考えることができる．しかし，本稿では，2 次のレニーサブエントロピーを扱うものとし，文献 [3] にて記されているサブエントロピーの性質が 2 次のレニーサブエントロピーでも成立するのかを考える．具体的には，2 次のレニーサブエントロピーが最小エントロピーの下界となっていること及び 2 次のレニーサブエントロピーでも積状態に対し劣加法性が成立することを示す．

2　2 次のレニーサブエントロピー

ρ を $\mathrm{Tr}\,\rho = 1$(トレース:対角和) を満たす，d 次元複素ヒルベルト空間上の半正定値作用素 (i.e., 密度作用素) とする．2 次のレニーサブエントロピー $Q_{\mathrm{R}}(\rho)$ は，密度作用素 ρ に対して次のように定義される:

$$Q_{\mathrm{R}}(\rho) := -\ln\left(\sum_{k=1}^{d}\frac{\lambda_k^{d+1}}{\prod_{l=1,l\neq k}^{d}(\lambda_k-\lambda_l)}\right). \tag{1}$$

ただし，λ_k $(1 \le k \le d)$ は，密度作用素 ρ の固有値であり，次式を満たす:

$$\sum_{k=1}^{d}\lambda_k = 1, \quad \forall\lambda_k \ge 0. \tag{2}$$

式 (1) は，固有値が縮退している場合に，直接計算することができず，文献 [1] では固有値が縮退している場合には計算時に極限を取ることを要請している．しかしながら，固有値が縮退している場合にも計算ができる次式が，式 (1) と一致することが示された [4]:

$$Q_{\mathrm{R}}(\rho) := \ln\left(\frac{2}{1+\sum_{k=1}^{d}\lambda_k^2}\right). \tag{3}$$

本稿では，式 (3) を 2 次のレニーサブエントロピーの式として用いる．

3　2 次のレニーサブエントロピーと最小エントロピーの関係

先行研究 [3] では，サブエントロピーの 1 つの性質として，サブエントロピーが最小エントロピー $H_{\min}(\rho) := -\ln\lambda_{\max}$ $(\lambda_{\max} := \max_k \lambda_k)$ の下界であることが示されている．本研究では，この性質が 2 次のレニーサブエントロピーでも成立することを示す．具体的には，次式が成立することを示す．

$$H_{\min}(\rho) \ge Q_{\mathrm{R}}(\rho). \tag{4}$$

本稿では，紙面の都合により，解析的な証明は省略する．

4　2 次のレニーサブエントロピーが積状態に対し劣加法的であるか

先行研究 [3] では，サブエントロピーの 1 つの性質として，サブエントロピーが積状態に対し劣加法的であることが示された．本研究では，この性質が 2 次のレニーサブエントロピーでも成立することを示す．具体的には，次式が成立することを示す．

$$Q_{\mathrm{R}}(\rho_{\mathrm{A}}\otimes\rho_{\mathrm{B}}) \le Q_{\mathrm{R}}(\rho_{\mathrm{A}}) + Q_{\mathrm{R}}(\rho_{\mathrm{B}}). \tag{5}$$

本稿では，紙面の都合により，解析的な証明は省略する．

5　まとめ

本稿では，2 次のレニーサブエントロピーが最小エントロピーの下界となっていること及び 2 次のレニーサブエントロピーが積状態に対し劣加法性が成立することを示した．今後の課題として，2 次のレニーサブエントロピーのより多くの性質を明らかにすること，及び，それらの性質を用いて操作的な意味を追求することが挙げられる．

参考文献

[1] R. Jozsa, et al., Phys. Rev. **A49**, pp.668-677, (1994).
[2] F. Mintert, et al., Phys. Rev. **A69**, 022317, (2004).
[3] N. Datta, et al., J. Math. Phys. **55**, 062203, (2014).
[4] S. Takahira, K. Sato, K. Nakahira, and T. S. Usuda, in preparation.

公表論文

1. 湯原 隼斗，佐藤 圭介，臼田 毅，平成 30 年度電気・電子・情報関係学会東海支部連合大会, J3-5, (2018).