非対称量子信号に対する密度作用素の固有値問題簡単化及び量子通信路容量の計算

北村 嗣音　　　指導教員：臼田 毅

1　はじめに

量子通信 [1, 2] において，平均光子数が極めて小さい場合，連続系の通信路容量は，コヒーレント状態を用いた離散の量子通信路容量でほぼ達成できることが示されている [3]．しかし，この達成度に関する研究は，信号数を増やすと量子通信路容量の計算が困難となることから，わずかな範囲でしか解明されていない．量子通信路容量を求めるには，先験確率で重み付けたグラム行列の固有値を計算する必要がある．本研究ではその固有値問題が簡単化できることを示す．さらに，その結果を非対称量子信号の量子離散化通信路容量の計算に適用し，連続系の通信路容量を離散系によりどれだけ達成できるか考察する．

2　重み付きグラム行列の固有値問題簡単化

位相平面における偏角が $0 \leq \varphi < \frac{2\pi}{n} (n \geq 2, n \in \mathbb{Z})$ の範囲にある任意の m 元複素振幅集合 $\{\beta_k | (k = 1, 2, \ldots, m), m \in \mathbb{N}, \beta_k \neq \beta_{k'}, k \neq k', \beta_k \neq 0\}$ に対し，$\{\alpha_k^{(i)} = \beta_k \omega^{i-1} | (i = 1, 2, \ldots, n), \omega = \exp\left(\frac{2\pi \mathbf{j}}{n}\right)$，$\mathbf{j}$ は虚数単位 $\}$ を考えると，扇形領域の信号を n 回回転させてできる非対称 nm 元コヒーレント状態信号は，回転作用素 $\hat{U}$ を用いて式 (1) のように表される [4]．

$$\tilde{\mathcal{S}} = \bigcup_{k=1}^{m} \tilde{\mathcal{S}}_k \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{S}}_k &= \{\sqrt{\xi_k}|\alpha_k^{(1)}\rangle, \hat{U}\sqrt{\xi_k}|\alpha_k^{(1)}\rangle, \ldots, \hat{U}^{n-1}\sqrt{\xi_k}|\alpha_k^{(1)}\rangle\} \\ &= \{\sqrt{\xi_k}|\beta_k\rangle, \hat{U}\sqrt{\xi_k}|\beta_k\rangle, \ldots, \hat{U}^{n-1}\sqrt{\xi_k}|\beta_k\rangle\}\end{aligned} \tag{2}$$

$G_{k,l}^{(n)}$ を 2 つの部分集合 $\tilde{\mathcal{S}}_k$ と $\tilde{\mathcal{S}}_l$ の各信号間の内積を並べた n 次の正方行列とすると，nm 元量子信号の重み付きグラム行列 $G^{(nm)}$ は式 (3) のブロック分割した形で表される．

$$G^{(nm)} = \left[G_{k,l}^{(n)}\right] \tag{3}$$

ここで，各ブロック $G_{k,l}^{(n)}$ は巡回行列となっているため，$G_{k,l}^{(n)}$ は，巡回行列の固有値 $\lambda_i^{(k,l)}$ と固有ベクトル $\boldsymbol{\lambda_i}$ の解析解を用いて，式 (4) のスペクトル分解形式を得ることができる．

$$G_{k,l}^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(k,l)} \boldsymbol{\lambda_i} \boldsymbol{\lambda_i}^{\mathbf{H}} \tag{4}$$

これを式 (3) に代入すると，$A_i = \left[\lambda_i^{(k,l)}\right]$ として，

$$G^{(nm)} = \sum_{i=1}^{n} A_i \otimes \boldsymbol{\lambda_i} \boldsymbol{\lambda_i}^{\mathbf{H}} \tag{5}$$

と表せる．各 A_i はエルミートなので，A_i の固有値を $a_j^{(i)}$，固有ベクトルを $\boldsymbol{a_j^{(i)}}$ としてスペクトル分解した A_i を式 (5) に代入し，さらに変形すると以下の形となる．

$$G^{(nm)}(\boldsymbol{a_j^{(i)}} \otimes \boldsymbol{\lambda_i}) = a_j^{(i)}(\boldsymbol{a_j^{(i)}} \otimes \boldsymbol{\lambda_i}) \tag{6}$$

つまり，$G^{(nm)}$ の固有値，固有ベクトルはそれぞれ $a_j^{(i)}$，$\boldsymbol{a_j^{(i)}} \otimes \boldsymbol{\lambda_i}$ となるため，$G^{(nm)}$ の固有値問題を解くには，その $\frac{1}{n}$ のサイズの m 次正方行列である A_i の固有値と固有ベクトルを求めれば十分であることがわかる．

3　通信路容量の計算への応用

いくつかの非対称量子信号に対し，連続系の通信路容量を量子離散化通信路容量によってどの程度のエネルギー制約まで達成可能なのか検証を行った．

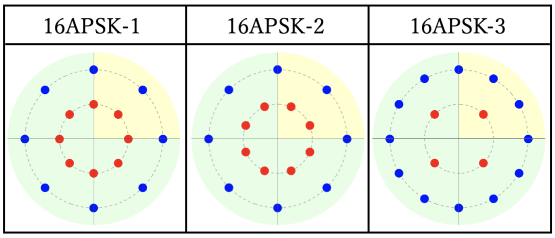

図 1　各 16APSK 信号の図

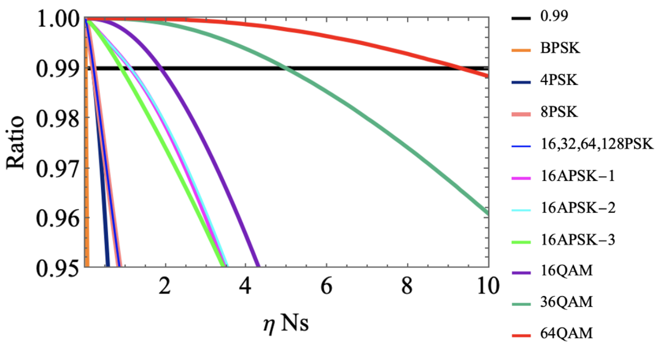

図 2　量子離散化通信路容量と連続系の量子通信路容量の比

16 元の信号同士を比較すると，振幅の大きさの種類が多いほど，大きな平均光子数でも連続系の通信路容量をほぼ達成することができている．また，同じ信号数でも振幅の小さな信号点の配置数が多いときに量子通信路容量は大きくなる．さらに QAM 信号では，信号数を増やすことで達成する範囲が大幅に広がった．

4　おわりに

非対称な nm 元コヒーレント状態信号に対する重み付きグラム行列の固有値問題を簡単化できることを示した．また，様々な信号の量子離散化通信路容量の計算を行い，より大きな平均光子数で連続系の量子通信路容量を達成できることを示した．

参考文献

[1] C. W. Helstrom: *Quantum detection and estimation theory*, Academic Press, New York, (1976).

[2] 広田修: 量子情報科学の基礎, 森北出版, (2002).

[3] M. Sohma and O. Hirota, Phys. Rev. **A62**, 052312, (2000).

[4] 王天澄, 宮崎 龍輔, 高比良宗一, 臼田毅, 電学論 (C), **142**, pp.74-87, (2022).

公表論文

1. 北村, 王, 高比良, 臼田, 令和 4 年度電気・電子・情報関係学会東海支部連合大会, E1-1, (2022).
2. 北村, 王, 高比良, 臼田, 第 45 回情報理論とその応用シンポジウム, 予稿集 2.3.5, pp.169-174, (2022).