

混合状態信号に対する量子測定 BWSRM の最適重みについて

宮地 謙吾

指導教員：白田 毅

1 はじめに

現在の通信システムにおける重要な課題の一つとして、量子雑音の影響を抑制し、信号をできる限り正確に識別する良い量子測定を用いることがある。Belavkin によって数学的に定義された BWSRM (Belavkin weighted square-root measurement)[1] と呼ばれる量子測定は、重みを最適化することで任意の先験確率を持つ信号に対して最適な測定を与えることが可能な重要な測定クラスである。先行研究 [2] から量子状態が純粋状態の場合は重みはスカラーであり、最適重みの計算例が示されている。しかし、量子状態が混合状態の場合、重みは行列であり最適重みの候補が多く存在するため、最適重みの計算例がほとんど知られていない。そのため、具体的な計算が試みられなかったといえる。以上の背景から、本研究では 2 通りの数値計算手法から混合状態信号の最適重みを計算、考察することを目的とする。

2 量子測定

M 元量子状態信号系 $\{\rho_m \mid m = 0, 1, \dots, M-1\}$ を考える。量子測定は一般に、正作用値測定 (POVM) $\Pi = \{\Pi_m \mid m = 0, 1, \dots, M-1\}$ によって数学的に記述される。 Π の各要素 Π_m は、決定作用素と呼ばれ、以下の条件を満たすエルミート作用素となる。

$$\Pi_m \geq 0, \quad \sum_{m=0}^{M-1} \Pi_m = I \quad (1)$$

ここで、 I はヒルベルト空間 \mathcal{H} 上の恒等作用素を表す。

また、 ξ_m を先験確率とすると、識別成功の平均確率 P_C は、以下のように表すことができる。

$$P_C = \sum_{m=0}^{M-1} \xi_m \text{Tr}(\rho_m \Pi_m) \quad (2)$$

なお、 $1 - P_C$ は識別誤りの平均確率を表す。最大識別成功率 $P_C^{(\text{opt})}$ は

$$P_C^{(\text{opt})} = \max_{\Pi} P_C \quad (3)$$

であり、この最適値を達成する Π を量子最適測定と呼ぶ。

3 BWSRM

M 元量子状態信号系 $\{\rho_m \mid m = 0, 1, \dots, M-1\}$ に対し、BWSRM の POVM $\Pi^{(w)} = \{\Pi_m^{(w)} \mid m = 0, 1, \dots, M-1\}$ は以下のように定義される。

$$\Pi_m^{(w)} = [G^{(w)}]^{-1/2} \psi_m w_m \psi_m^\dagger [G^{(w)}]^{-1/2} \quad (4)$$

ただし、

$$G^{(w)} = \sum_{k=0}^{M-1} \psi_k w_k \psi_k^\dagger \quad (5)$$

である。 $\Pi_m^{(w)}$ は式 (5) を満たす。 w_m は、BWSRM において、Belavkin weight と呼ばれる重みである。

4 BWSRM の最適重み

混合状態信号に対する BWSRM の最適重みについて、2 通りの手法で数値計算を行う。一つ目の手法として、中平らが提案した最適測定を数値的に求める既存手法 [2] (以降、中平らのアルゴリズムと呼ぶ) を用いる。二つ目の手法として、先行研究 [3] から BWSRM の重みを対角行列に限定して全数探索を行い、その中から識別成功率が最大となる POVM を算出する手法を用いる。2 次元 2 元混合状態信号に対する両手法の実行結果を表 1 に示す。

表 1 2 次元 2 元混合状態信号に対する BWSRM の最適重みの数値計算結果

	中平らのアルゴリズム	対角行列に限定した探索
w_0	$\begin{bmatrix} 0.0513702 & -0.00442466 \\ -0.00442466 & 0.000381109 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
w_1	$\begin{bmatrix} 0.462256 & 0.0103278 \\ 0.0103278 & 0.000230745 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
Π_0	$\begin{bmatrix} 0.576486 & -0.494115 \\ -0.494115 & 0.423514 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.576471 & -0.494118 \\ -0.494118 & 0.423529 \end{bmatrix}$
Π_1	$\begin{bmatrix} 0.423514 & 0.494115 \\ 0.494115 & 0.576486 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.423529 & 0.494118 \\ 0.494118 & 0.576471 \end{bmatrix}$
P_C	0.8332	0.8332

表 1 から、各手法における結果を比較すると、中平らのアルゴリズムと対角行列に限定した探索における決定作用素と識別成功率は 4~5 桁以上の精度で数値的に一致していた。また、重みを対角行列に限定したとしても最適となったことから、最適重みが一意ではないことと、対角行列に限定したとしても最適解が得られるという結果が得られた。

5 おわりに

混合状態信号に対する BWSRM の最適重みの数値計算を試みた。結果として、2 通りの数値計算手法において、最適重みが一意ではなく、最適重みが異なっても、最適決定作用素や識別成功率は、近い値を取っており、数値的に一致することが示された。そのため、重みとなりうるすべての行列を探索するのではなく、対角行列のみを探索するなど、クラスを限定することで、計算するパラメータを削減できる可能性が考えられる。

参考文献

- [1] V.P. Belavkin, Radio Eng. Electron. Phys. **20**, 39, (1975).
- [2] K. Nakahira, K. Kato, and T.S. Usuda, Phys. Rev. **A91**, 012318, (2015).
- [3] 五十川翔梧, 中川綾太, 王天澄, 高比良宗一, 白田毅, 信学論 **J105-B**, no.3, pp.62-73, (2022).

公表論文

1. 宮地, 五十川, 王, 白田, 令和4年度電気・電子・情報関係学会東海支部連合大会, E1-7, (2022).